

Бєлих О.В.

Державний
біотехнологічний
університет,
Харків, Україна

E-mail:

sashafincol@gmail.com

**МЕХАНІЧНА МОДЕЛЬ ПРОЦЕСУ
ВІДОКРЕМЛЕННЯ ГРАНУЛ ПЕРГИ У
РОТОРНОМУ ЕКСТРАКТОРІ**

DOI: <https://doi.org/10.31359/2311-441X-2025-27-140>

УДК 631.95:519.6:664.9:638.162

Бєлих О.В. Механічна модель процесу відокремлення гранул перги у роторному екстракторі

Анотація. У роботі представлено механічну модель ударної взаємодії між молотком ротора та восковими комірками стільників у процесі відокремлення гранул перги. Розроблено аналітичну залежність для визначення максимальної сили удару P_{\max} через імпульс сили, масу молотка, швидкість обертання ротора та тривалість контакту. Запропоновано критерій селективного руйнування воску при збереженні цілісності гранул перги, який базується на співвідношенні границь міцності матеріалів. Визначено оптимальний діапазон кутової швидкості ротора ($\omega=30-45\text{ c}^{-1}$) та геометричні параметри молотків (радіус заокруглення 2–3 мм), що забезпечують ефективно вилучення перги без її пошкодження. Проведено аналіз обмежень моделі: відсутність тертя, локальний характер деформації, одночасність контактів, необхідність уточнення параметрів k та p_k при зміні вологості чи температури. Отримані результати можуть бути використані для оптимізації конструкцій роторних екстракторів і підвищення ефективності технології механічного вилучення перги.

Ключові слова: перга, роторний екстрактор, ударна взаємодія, механічна модель, контакт Герца, сила удару, критерій руйнування.

Belykh O. Mechanical Model of the Bee Bread Granules Separation Process in a Rotary Extractor.

Abstract. This paper presents a mechanical model describing the impact interaction between a rotor hammer and the wax cells of honeycombs during the separation of bee bread granules. An analytical dependence was obtained for determining the maximum impact force P_{\max} through the impact impulse, hammer mass, rotor angular velocity, and contact duration. A criterion of selective wax destruction while preserving the integrity of bee bread granules was proposed, based on the relationship between the strength limits of the contacting materials. The optimal range of rotor angular velocity ($\omega=30-45\text{ s}^{-1}$) and geometric parameters of hammers (edge rounding radius 2–3 mm) ensuring effective extraction without damaging the granules were determined. The model limitations were analyzed, including the absence of friction, localized deformation, simultaneous multi-point contact, and the need to refine stiffness parameters k and p_k under varying humidity or temperature conditions. The obtained results can be applied to the optimization of rotary extractor designs and improvement of mechanical bee bread extraction efficiency.

Keywords: bee bread, rotary extractor, impact interaction, mechanical model, Hertz contact, impact force, failure criterion.

Постановка проблеми

Сучасне бджільництво потребує ефективних технологій перероблення продуктів життєдіяльності бджіл, зокрема перги (бджолиного хліба), яка є високобіологічно активною речовиною з цінним поживним та фармакологічним потенціалом. У природному стані перга зберігається у воскових комірках стільників, де вона тісно спресована й закріплена восковими стінками. Традиційні методи отримання перги передбачають або ручне виймання, або глибоке заморожування з подальшим механічним руйнуванням стільників, що призводить до значних втрат, пошкодження гранул і зміни їхніх фізико-хімічних властивостей.

Проблема полягає в тому, що під час механічного вилучення гранул перги відбувається ударна взаємодія між робочими органами екстрактора та восковими стільниками, унаслідок чого виникають короточасні динамічні навантаження. Ці навантаження повинні бути достатніми для руйнування воскової структури, але не настільки великими, щоб пошкодити гранули перги, які мають відносно низьку механічну міцність і високу чутливість до деформації.

Недостатньо дослідженими залишаються питання кінематики, енергетики та динаміки удару молотка ротора по пергових стільниках, зокрема формування імпульсу сили, часу контакту, величини ударного навантаження та умов пружного/пластичного руйнування воскової основи. У більшості наявних конструкцій екстракторів не враховуються фізико-механічні властивості перги та воску (еластичність, крихкість, вологість, температура), що ускладнює точне моделювання процесу та оптимізацію режимів роботи.

Крім того, у сучасних дослідженнях бракує аналітичних і числових моделей, що описують контактну взаємодію «молоток — стільник» у координатах швидкості, енергії та сили, із застосуванням перевірених у механіці моделей удару (наприклад, Гертца, Ланкарані—Нікравеша, або моделей із гістерезисним демпфуванням). Це обмежує можливості прогнозування руйнування воскової структури та запобігання пошкодженню гранул.

Таким чином, постає науково-технічна задача — розробити механічну модель процесу ударної взаємодії в роторному екстракторі з молотками, що дозволить визначити умови селективного руйнування воскових стінок без пошкодження гранул перги. Така модель повинна враховувати властивості матеріалів (модуль пружності, густину, вологість, температуру), параметри удару (швидкість обертання ротора, масу молотка, радіус траєкторії), а також контактні сили, що формуються в момент удару.

Розв'язання цієї проблеми має важливе значення для створення енергоощадних, технологічно надійних і біологічно безпечних методів вилучення перги, з мінімальними втратами та збереженням її функціональних властивостей.

Представлене дослідження виконано в межах дисертаційної роботи здобувача ступеня доктора філософії та є складовою частиною прикладної науково-дослідної роботи «Техніко-технологічне обґрунтування напряму “Міське бджільництво” при університеті», що виконується в Державному біотехнологічному університеті (державний реєстраційний № 0122U002036).

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Перга (бджолиний хліб) є продуктом переробки пилку бджолами та відзначається високою біологічною цінністю, вмістом ферментів, амінокислот, вітамінів і фенольних сполук. Фізико-хімічні властивості цього продукту докладно досліджувалися у низці робіт [1–3], де визначено вплив умов зберігання, вологості та температури на хімічний склад і стабільність біологічно активних речовин. Роботи [4, 5] показали, що склад і

властивості перги залежать від ботанічного походженняпилку, умов ферментації та мікробіологічної активності.

Особливу увагу приділено дослідженню фізико-механічних характеристик перги та воску як двофазного композиту, який формує структуру стільника. Моделювання процесів сушіння перги та пов'язаних із цим змін її стану представлено у роботі [6], що підкреслює роль вологості як ключового фактора, який визначає крихкість і міцність гранул при механічному впливі. Для воску базою коректного визначення властивостей є стандартизовані методики дослідження [7]. Експериментальні дані про зміну фізико-механічних параметрів воску з температурою наведено у роботі [8], що пояснює зниження його жорсткості та зростання пластичності при підвищенні температури, тоді як гранули перги демонструють обмежену деформаційну здатність і схильність до крихкого руйнування. Це зумовлює потребу точного добору режимів механічного навантаження під час екстракції, щоб досягати руйнування воскових стінок без деградації гранул перги.

Важливим супровідним аспектом є біологічні функції воску. Зокрема, огляд антимікробної активності та практичних застосувань воску наведено у роботі [9], що дозволяє розглядати воскову матрицю не лише як механічний бар'єр, а й як середовище зі специфічними захисними властивостями. Технологічні підходи до переробки бджолиних продуктів, включно з пергою, узагальнено в огляді [10], де показано, що в інженерних рішеннях часто домінує технологічний підхід (продуктивність і швидкість), тоді як фізико-механічні параметри матеріалу та їх залежність від температури й вологості враховуються неповно, що підвищує ризик пошкодження гранул і зниження якості кінцевого продукту.

У галузі моделювання динамічних процесів удару сформовано низку аналітичних і числових підходів, які базуються на контактних моделях. Для опису ударної взаємодії в багатотільних системах класично застосовується підхід Ланкарані-Нікравеша [11], а огляд і систематизацію контактних-силових моделей для задач *multibody dynamics* наведено у роботі [12]. Практично значущою для інженерних розрахунків є модель неперервної сили контакту, запропонована для аналізу ударів у багатотільних системах [13], а також узагальнювальний огляд методів моделювання ударів у *multibody systems* [14]. У межах цих підходів контакт часто інтерпретується як нелінійний пружно-дисипативний процес, для якого базові висновки Герца можуть використовуватися як перший рівень наближення; у цьому контексті показовою є робота з прогнозування ударних сил на основі герцівської теорії [15]. Сучасні уточнення, орієнтовані на підвищення точності опису втрат енергії та валідацію моделей, представлено у дослідженні поліпшеної герцівської контактної моделі з експериментальним підтвердженням [16], а також у роботі щодо нелінійного відгуку герцівського контакту при гармонічному збуренні та субгармонічних ефектах [17]. Для задач із одночасними багатозонними ударами актуальним є аналіз застосовності комплаєнтних контактних моделей [18], тоді як приклад моделі з гістерезисним демпфуванням, придатної для відтворення енергетичних втрат, подано у роботі [19]. Узагальнений огляд методологій (аналітичних, числових та експериментальних) для систем із зазорами та недосконалими з'єднаннями, де контактні явища визначають динаміку, наведено у праці [20].

У контексті роторних екстракторів перги критично важливими є розподіл сил у точці удару, тривалість контакту та форма імпульсу сили. Саме такі характеристики визначають, чи буде руйнування воску селективним, тобто спрямованим на руйнування стільникової матриці при збереженні гранул перги. Хоча для бджолиних продуктів прямі дослідження імпульсних режимів на рівні «молоток—стільник» представлені обмежено, практичні висновки щодо впливу вологості на міцність і деформаційні властивості перги важливі для режимів механічної дії: оптимізацію сушіння та її вплив на показники якості

перги системно досліджено у роботі [21], що задає фізично обґрунтовані межі для механічного навантаження на матеріал із різною вологістю. Додатково, поглиблена фенольна характеристика перги, релевантна для оцінки якості продукту після механічної обробки, представлена в роботі [22], що підкреслює: механічні режими екстракції повинні контролювати не лише цілісність гранул, а й збереження чутливих біоактивних компонентів.

У напрямі вивчення гранулярних матеріалів, які за механічною поведінкою можуть слугувати наближенням до структурованої перги, проведено низку експериментальних і теоретичних досліджень. Зокрема, закономірності високошвидкісного удару по гранулярному середовищу та масштабні залежності сили й акустичних імпульсів описано у роботі [25], а класичний аналіз динаміки удару сфер і дисків у зернисті середовища наведено у праці [27]. Важливий для інтерпретації ранньої стадії контакту результат про степеневі закони масштабування сил удару представлено в роботі [28]. З огляду на те, що перга в комірці має гранулярно-композитну структуру (гранули в оточенні воскових стінок), такі висновки дозволяють якісно пояснювати наявність короткого піку сили на початку контакту та подальше згасання через внутрішнє демпфування й перебудову контактної мережі. Для інженерної оцінки параметрів гранулярних середовищ, які впливають на розподіл навантажень, корисним є огляд механічних властивостей зернистих матеріалів і їх впливу на передачу сил [29].

Окремо слід підкреслити, що при проектуванні режимів м'якої дії важливе місце займає аналіз пошкоджуваності біологічних матеріалів. Методологію оцінювання механічних пошкоджень біологічних об'єктів із прив'язкою до параметрів удару та мікропошкоджень запропоновано у роботі [24], що може бути безпосередньо використано як підхід для кількісного контролю руйнування гранул перги. Аналогічно, вплив повторних навантажень і накопичення механічних ушкоджень, хоча й показаний на іншому матеріалі (георешітках), демонструє загальний механізм деградації при циклічній дії [26], який принципово важливий для роторних систем з багаторазовими ударами.

З погляду удосконалення математичного опису контакту для задач із варіативними нелінійностями, важливим є розвиток моделей з довільними показниками степеня для заглиблення та швидкості, що дозволяє краще підлаштовувати контактну силу під експеримент [30]. Для задач багатозонного третього контакту конструкційних елементів (зокрема, при взаємодії гнучких стінок і ударних елементів) релевантною є робота з моделюванням багатозонних контактів тонких балок [32]. Нарешті, для розуміння передачі імпульсу через зернистий масив і масштабів швидкості поширення збурень важливими є результати про швидкість поширення сили в шарі частинок при ударі [33].

Таким чином, аналіз наукових джерел свідчить, що, попри значний обсяг досліджень у галузях фізико-хімії перги, механіки удару, контактної динаміки та технологій переробки бджолиних продуктів, залишається недостатньо вивченим питання моделювання ударної взаємодії між молотками ротора та перговими стільниками як системи з неоднорідною, двофазною структурою (віск—гранули перги) та змінними властивостями, зумовленими вологістю й температурою. Подальшого розвитку потребує інтегрована механічна модель, яка б одночасно враховувала контактні закономірності удару, фізико-механічні властивості матеріалу та критерії селективного руйнування воскової структури за умови збереження цілісності гранул і біоактивних компонентів перги.

Формулювання цілей статті

Метою статті є розроблення аналітичної механічної моделі процесу відокремлення гранул перги у роторному екстракторі з молотками як робочими органами, що забезпечує селективне руйнування воскової основи стільників без пошкодження гранул перги.

Для досягнення поставленої мети необхідно розв'язати такі основні завдання:

Проаналізувати фізико-механічні властивості перги та воску як основних елементів структури стільника, які визначають характер ударної взаємодії.

Дослідити кінематичні та динамічні параметри руху молотків ротора, встановити залежності між швидкістю обертання, масою робочого органа та енергією удару.

Побудувати аналітичну модель ударного контакту між молотком і восковою коміркою, використовуючи принципи імпульсної механіки та контактних моделей Герца, Ланкарані–Нікравеша і моделей із гістерезисним демпфуванням.

Визначити умови селективного руйнування воскової структури, за яких сила удару перевищує межу міцності воску, але не досягає критичних значень для крихкої перги.

Розрахувати основні параметри процесу — максимальну силу удару, тривалість контакту, імпульс сили, а також побудувати залежності між цими величинами та параметрами обертання ротора.

Обґрунтувати оптимальний діапазон частоти обертання ротора ω , що забезпечує ефективне вилучення гранул із мінімальними енергетичними витратами й без порушення структури перги.

Провести верифікацію запропонованої моделі шляхом порівняння розрахункових результатів із експериментальними даними та літературними джерелами.

Методологічна основа дослідження сформована відповідно до завдань та наукових підходів прикладної науково-дослідної роботи «Техніко-технологічне обґрунтування напрямку “Міське бджільництво” при університеті» (державний реєстраційний № 0122U002036), що виконується під науковим керівництвом Ю. М. Сиромятникова [34-36].

Виклад основного матеріалу дослідження

1. Об'єкт дослідження

Об'єктом дослідження є динамічний процес механічного відокремлення гранул перги від воскових структур стільника, що реалізується в роторному екстракторі з ударними робочими органами типу молотків. Цей процес характеризується короткочасним контактом із передачею імпульсу сили, внаслідок чого відбувається руйнування воскової матриці та звільнення гранул перги. До складу об'єкта дослідження входять: ротор із молотками, пергові стільники як об'єкт впливу, повітряно-механічне середовище, у якому відбувається контактна взаємодія. Процес визначається сукупністю кінематичних, динамічних і фізико-механічних параметрів, які впливають на якість отриманого продукту.

2. Предмет дослідження

Предметом дослідження є закономірності формування сили удару та імпульсу при взаємодії молотка ротора з восково-перговою структурою, а також вплив цих параметрів на ефективність відокремлення гранул. Метою аналізу є визначення критичних умов переходу від пружного до пластичного деформування воскової комірки при мінімальному пошкодженні перги.

У межах предмета дослідження вивчаються: залежності між масо-інерційними характеристиками молотка, швидкістю обертання ротора та енергією удару; вплив

жорсткості, вологості та температури воскової структури на контактні напруження; умови селективного руйнування стільникової основи.

Основна увага приділена моделюванню ударної взаємодії типу Герца–Ланкарані–Нікраवेशа, з урахуванням реальних властивостей біоматеріалу та рекомендацій щодо конструкції молотків і режимів їх обертання.

2.2. Конструктивно-технологічна схема роторного екстрактора перги

Узагальнена конструктивно-технологічна схема роторного екстрактора перги показана на рис. 1.

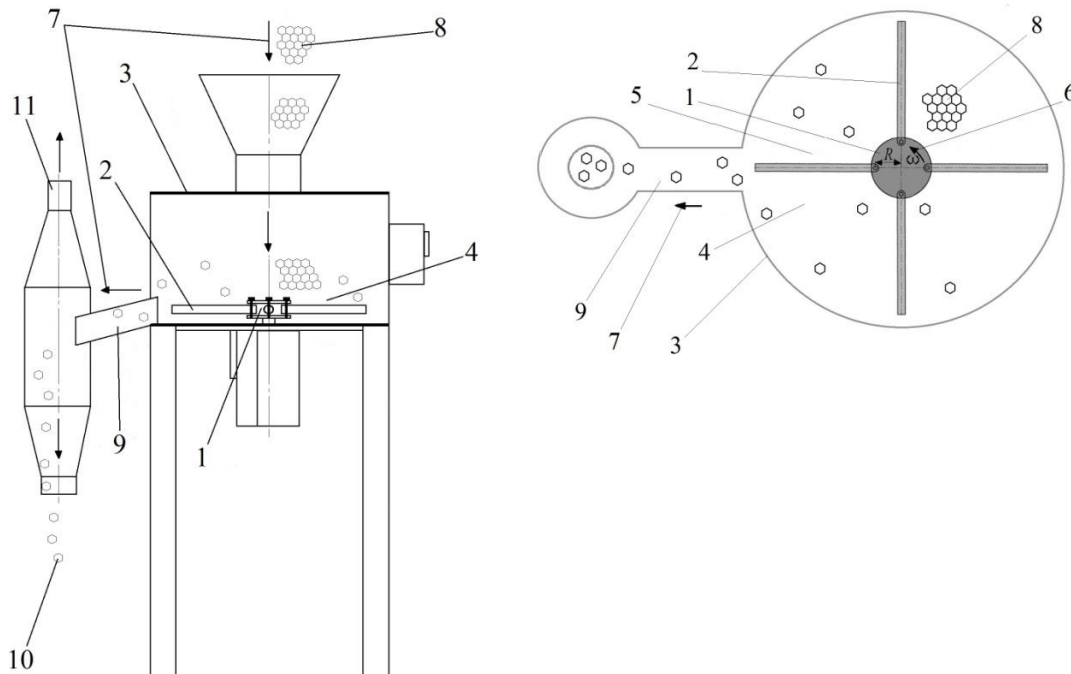


Рис. 1 – Узагальнена конструктивно-технологічна схема роторного екстрактора перги з молотками де: 1 - ротор; 2 - молоток; 3 - робоча камера; 4 - зона ударної взаємодії; 5 - радіус R ; 6- кутова швидкість ω ; 7- напрямок подачі та вивантаження матеріалу; 8 – бджолині воско-пергові стільники; 9 – воско-пергова суміш; 10 – перга; 11 - розрядження

Роторний екстрактор перги призначений для механічного відокремлення гранул перги (10) від пергових стільникових структур (8) за рахунок короточасної ударної взаємодії молотків (2) ротора (1) з матеріалом у робочій камері (3). Конструкція машини (1–11) орієнтована на селективне руйнування воскової основи стільника при мінімальному пошкодженні гранул перги (10), що є визначальним критерієм якості готової продукції.

Основним робочим органом екстрактора є ротор (1), який обертається з постійною кутовою швидкістю ω (6). На роторі (1) розміщено систему молотків (2), які в процесі обертання здійснюють плоский рух у радіальній площині та періодично взаємодіють із перговими стільниками (8) та з воскоперговою масою (9), що подається у робочу камеру (3). Радіус розміщення молотка R (5), який відраховується від осі обертання ротора (1) до осі підвісу молотка (2), є одним з основних геометричних параметрів, що визначає кінематичні характеристики ударної взаємодії.

Молоток (2) розглядається як твердий елемент масою m та довжиною L , який у процесі роботи може відхилитися від радіального напрямку на кут α . Кут α характеризує миттєве положення молотка (2) відносно радіуса R (5) ротора (1) та визначає орієнтацію

процесу дозволяє поєднати операції руйнування воскової матриці та первинного розділення продуктів переробки в межах однієї машини.

Прийнята конструктивно-технологічна схема роторного екстрактора та відповідна розрахункова модель (рис. 2) створюють методологічну основу для подальшого аналітичного визначення імпульсу удару та максимальної ударної сили молотка, які є визначальними параметрами забезпечення селективного руйнування воскової основи та збереження цілісності гранул перги.

3. Фізико-механічні властивості пергових стільникових структур як вхідні параметри моделі

Фізико-механічні властивості пергових стільникових структур визначають характер їх руйнування при ударній взаємодії з молотками ротора та, відповідно, безпосередньо впливають на збереження цілісності гранул перги. На відміну від однорідних матеріалів, перговий стільник являє собою багатокомпонентну біологічну систему, що включає воскову матрицю, гранули перги та залишкові включення меду і пилку. У зв'язку з цим при побудові механічної моделі удару необхідно враховувати як структурні особливості стільника, так і умови його попередньої підготовки до переробки.

У подальшому аналізі фізико-механічні характеристики пергових стільників структур розглядаються як вхідні параметри імпульсної моделі ударної взаємодії «молоток – перговий стільник», що визначають допустимий рівень максимальної ударної сили.

3.1. Структура пергового стільника та умови підготовки до відокремлення гранул

Перговий стільник являє собою комірчасту біологічну структуру, сформовану з бджолиного воску (1), у внутрішніх осередках якої розміщені ущільнені гранули перги (2). Воскова основа (1) виконує функцію просторового механічного каркаса, що забезпечує форму та цілісність стільника, тоді як гранули перги (2) характеризуються відносно вищою щільністю, а також відмінними фізико-механічними властивостями порівняно з восковою матрицею.

Осередки стільника (3) слугують природними контейнерами для гранул перги (2) та визначають локальні умови їх механічного закріплення у восковій основі (1). Така структурна організація зумовлює різну реакцію компонентів пергового стільника на зовнішній механічний вплив, що є принципово важливим для аналізу процесу селективного руйнування воскової основи без пошкодження гранул перги.

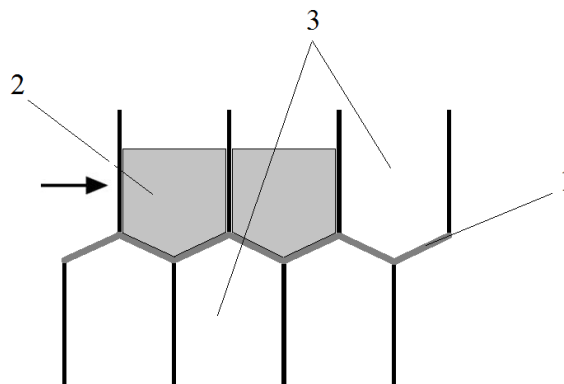


Рис. 3. Схематична будова пергового стільника де: 1 – воскова основа; 2 – гранули перги; 3 – осередок стільника

Перед механічною переробкою до пергових стільникових структур висувається низка технологічних вимог. Насамперед, стільники не повинні містити ознак плісняви або біологічного ураження, оскільки це змінює їх фізико-механічні властивості та ускладнює прогнозування характеру руйнування. Вміст залишкового меду має бути мінімальним, оскільки мед підвищує липкість перги та призводить до агломерації гранул при механічній обробці. Зберігання стільникової сировини здійснюється в умовах, що запобігають вторинному зволоженню та пластичній деформації воскової основи.

З позицій механіки удару перговий стільник доцільно розглядати як композиційний матеріал із різко відмінними механічними характеристиками компонентів. Умовно можна вважати, що руйнування воскової основи відбувається при досягненні певного граничного рівня контактних напружень σ_w^{cr} , тоді як для гранул перги характерним є інший граничний рівень σ_p^{cr} , причому $\sigma_w^{cr} \ll \sigma_p^{cr}$.

Ця нерівність створює передумови для селективного руйнування воску при збереженні цілісності гранул перги.

Для кількісного опису поведінки пергового стільника при ударі використовується ефективна контактна жорсткість k , яка залежить від стану воскової основи та вологості перги. У загальному випадку контактна сила між молотком і стільником описується степеневою залежністю:

$$P = k\xi^p, \quad (1)$$

де ξ – локальна деформація у зоні контакту,
 p – показник, що визначається характером контакту та станом матеріалу.

Одним із ключових технологічних прийомів підготовки пергових стільникових структур до механічного відокремлення гранул є попередня сушка. Практика показує, що при зниженні масової частки вологи у перзі до рівня приблизно $W=14-15\%$ істотно зменшується адгезійна взаємодія між гранулами та восковою основою, а також знижується липкість поверхні гранул. З механічної точки зору це відповідає зменшенню ефективної контактної жорсткості у зоні «гранула – віск» та зменшенню роботи сил зчеплення.

Вплив вологості на механічні властивості перги та воскової основи може бути узагальнено через залежність ефективної жорсткості

$$k = k_0 \left(\frac{W}{W_0} \right)^{-n}, \quad (2)$$

де k_0 – жорсткість при еталонній вологості W_0 ,
 n – експериментально визначений показник, що відображає чутливість матеріалу до зволоження.

Окрім сушки, важливим етапом підготовки є охолодження пергових стільникових структур. Зниження температури призводить до переходу воскової основи у більш крихкий стан, що супроводжується зменшенням граничної деформації ξ_w^{cr} та зниженням енергії руйнування воску. При цьому гранули перги, завдяки своїй структурі та складу, менш чутливі до помірного охолодження, що додатково розширює інтервал допустимих ударних навантажень.

Експериментальні та аналітичні дані, використані для параметризації механічної моделі, отримано з використанням матеріально-технічної бази Державного біотехнологічного університету в межах виконання зазначеної науково-дослідної роботи.

З енергетичної точки зору умова селективного руйнування пергового стільника при ударі може бути записана у вигляді

$$E_w^{cr} \leq \int_0^{\xi_{max}} P(\xi) d\xi < E_p^{cr}, \quad (3)$$

де E_w^{cr} – критична енергія руйнування воскової основи,
 E_p^{cr} – критична енергія руйнування гранул перги,
 ξ_{max} – максимальна контактна деформація.

Узагальнені фізико-механічні характеристики пергових стільникових структур, які використовуються у подальшому моделюванні ударної взаємодії, наведено в таблиці 1.

Таблиця 1

Основні фізико-механічні параметри пергових стільникових структур, що використовуються як вхідні параметри моделі

Параметр	Позначення	Одиниця вимірювання	Характерний діапазон	Фізичний зміст
Вологість перги	W	%	14–20	Визначає липкість і контактну жорсткість
Контактна жорсткість «молоток–стільник»	k	$\text{Н} \cdot \text{м}^{-\text{p}}$	змінна	Характеризує опір локальній деформації
Показник контактної залежності	p	–	1–1,5	Тип контакту та стан матеріалу
Критична напруга руйнування воску	σ_w^{cr}	МПа	нижча	Початок руйнування воскової основи
Критична напруга руйнування гранул	σ_p^{cr}	МПа	вища	Межа цілісності гранул перги
Критична енергія руйнування воску	E_w^{cr}	Дж	нижча	Руйнування каркаса стільника
Критична енергія руйнування гранул	E_p^{cr}	Дж	вища	Подрібнення гранул

Таким чином, фізико-механічні властивості пергових стільникових структур та умови їх попередньої підготовки визначають допустимий інтервал ударних навантажень, у межах якого забезпечується ефективно відокремлення гранул перги без їх механічного пошкодження. Зазначені параметри надалі використовуються як вхідні дані при аналітичному визначенні імпульсу удару та максимальної ударної сили молотка.

3.2. Параметри, що впливають на руйнування воскової основи та збереження цілісності гранул перги

Ефективність процесу механічного відокремлення гранул перги в роторному екстракторі визначається сукупністю фізико-механічних та технологічних параметрів, які формують характер ударної взаємодії між молотком і перговим стільником. На відміну від однорідних матеріалів, пергові стільникові структури демонструють істотно різну чутливість до ударних навантажень залежно від вологості, температури підготовки та структурного стану воскової основи і гранул перги. Тому для побудови адекватної розрахункової моделі доцільно виокремити набір параметрів, які безпосередньо впливають на руйнування воску та збереження цілісності гранул і надалі використовуються як вхідні дані моделі.

До основних параметрів, що визначають механічну поведінку пергового стільника при ударі, належать вологість перги W , температура попередньої підготовки T , характер руйнування воскової основи та схильність гранул перги до крихкого руйнування або крошіння при механічному впливі.

Вологість перги істотно впливає як на адгезійні властивості системи «гранула – віск», так і на ефективну контактну жорсткість у зоні удару. При підвищеній вологості спостерігається зростання пластичності воскової основи та збільшення роботи сил зчеплення, що потребує підвищення рівня ударної дії для руйнування стільника. З механічної точки зору це призводить до зростання ефективної контактної жорсткості k і зміни показника контактної залежності p . Узагальнено вплив вологості на контактні характеристики може бути описаний залежностями

$$k(W) = k_{\text{ref}} \left(\frac{W}{W_{\text{ref}}} \right)^{-n_k}, p(W) = p_{\text{ref}} + \Delta p \ln \left(\frac{W}{W_{\text{ref}}} \right), \quad (4)$$

де k_{ref} і p_{ref} — значення при еталонній вологості W_{ref} , n_k і Δp — емпіричні коефіцієнти, що відображають чутливість матеріалу до зволоження.

Температура підготовки пергових стільникових структур є другим ключовим фактором, який визначає характер руйнування воскової основи. При зниженні температури відбувається перехід воску у більш крихкий стан, що супроводжується зменшенням граничної деформації ξ_w^{cr} та критичної енергії руйнування E_w^{cr} . У першому наближенні температурну залежність критичної деформації воску можна подати у вигляді

$$\xi_w^{cr}(T) = \xi_{w0} \exp[-\beta(T_{\text{ref}} - T)], \quad (5)$$

де ξ_{w0} — гранична деформація при температурі T_{ref} , β — температурний коефіцієнт крихкості.

Схематичний вплив вологості та температури підготовки на контактну жорсткість і граничні характеристики воскової основи показано на рисунку 4.

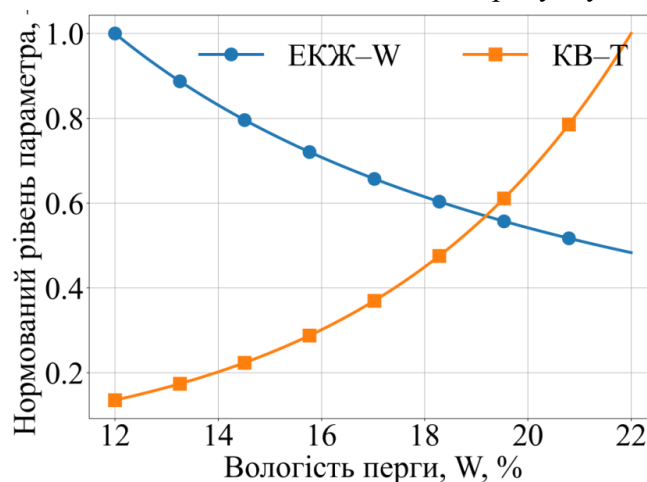


Рис. 4 – Вплив вологості W та температури підготовки T на ефективну контактну жорсткість k і крихкість воскової основи: ЕКЖ-В — нормована ефективна контактна жорсткість як функція вологості перги; КВ-Т — нормована крихкість основи як функція температури підготовки.

На відміну від воскової матриці, гранули перги характеризуються вищою структурною міцністю та меншою чутливістю до помірних змін температури. Однак при перевищенні певного рівня контактних напружень або енергії удару вони схильні до крихкого руйнування та інтенсивного крошіння. З позицій механіки руйнування це відповідає досягненню критичної енергії

$$E_p^{cr} = \int_0^{\xi_p^{cr}} k_p \xi^{p_p} d\xi = \frac{k_p}{p_p+1} (\xi_p^{cr})^{p_p+1}, \quad (6)$$

де k_p і p – параметри контактної взаємодії, характерні для гранул перги,
 ξ_p^{cr} – гранична деформація, що відповідає початку її руйнування.

Таким чином, з урахуванням впливу вологості та температури умова селективного руйнування пергового стільника при ударній взаємодії з молотком може бути сформульована у вигляді подвійної нерівності

$$E_w^{cr}(W, T) \leq \int_0^{\xi_{max}^{cr}} P, \quad (7)$$

де ξ_{max} – максимальна контактна деформація, що реалізується в процесі удару.

Для практичної реалізації цієї умови доцільно ввести поняття «вікна технологічних умов», яке визначає допустимі поєднання вологості та температури підготовки пергових стільників структур. Графічну інтерпретацію такого вікна подано на рисунку 5.

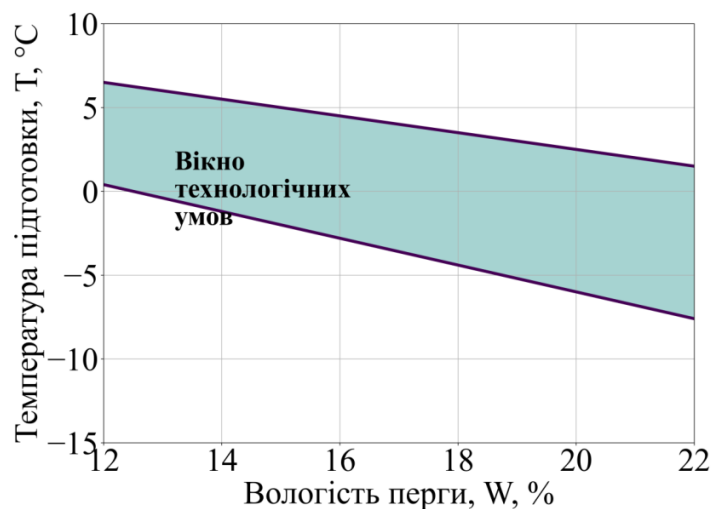


Рис. 5 – Вікно технологічних умов підготовки пергових стільникових структур, що забезпечує селективне руйнування воску при збереженні цілісності гранул перги

Нижня межа області відповідає режимам, за яких енергія удару недостатня для ефективного руйнування воскової основи. Верхня межа області обмежує режими, при яких зростає ризик крихкого руйнування та кришіння гранул перги. Заштрихована область визначає раціональні поєднання W і T , що використовуються як вихідні умови для подальшого розрахунку імпульсу удару та максимальної сили молотка.

У межах цього вікна параметрів забезпечується зниження граничної енергії руйнування воскової основи при одночасному збереженні достатнього запасу міцності гранул перги. З точки зору подальшого розрахунку ударної взаємодії це означає, що параметри W і T можуть бути зафіксовані в допустимих межах, після чого задача визначення максимальної ударної сили молотка зводиться до аналізу імпульсу удару та кінематичних параметрів ротора.

Сформоване вікно технологічних умов та відповідний набір параметрів створюють необхідні передумови для подальшого аналітичного визначення імпульсу удару і максимальної ударної сили молотка ротора, що безпосередньо використовується у математичній моделі процесу відокремлення гранул перги.

4. Механічна модель руху ротора і молотка

4.1. Узагальнені координати та кінематика системи

Для побудови механічної моделі ударної взаємодії молотка з перговим стільником роторний екстрактор розглядається як плоска механічна система з двома ступенями вільності. Узагальнену кінематичну схему руху ротора і молотка наведено на рисунку 6.

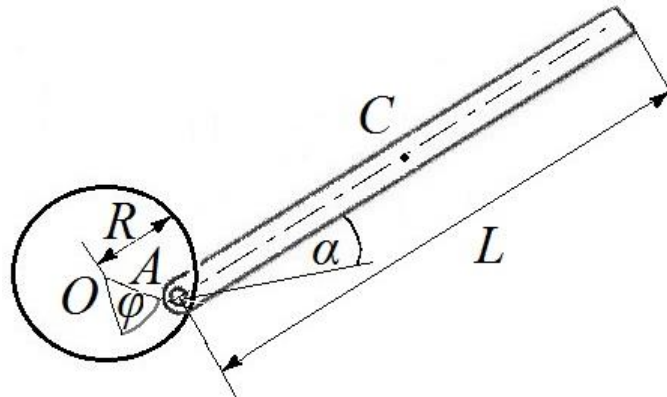


Рис. 6 – Кінематична схема руху ротора з молотком та введення узагальнених координат (φ — кут повороту ротора; α — кут відхилення молотка; R — радіус розміщення молотка; L — довжина молотка; O — вісь обертання ротора; C — центр мас молотка)

У прийнятій кінематичній схемі ротор розглядається як абсолютно жорстке тіло, що обертається навколо нерухомої осі O з кутом повороту φ . Молоток закріплений на роторі на радіусі R і являє собою жорсткий елемент довжиною L , який у процесі руху може відхилитися від радіального напрямку на кут α . Центр мас молотка позначено точкою C .

У якості узагальнених координат системи приймаються: $\varphi(t)$ — кут повороту ротора відносно нерухомої осі O ; $\alpha(t)$ — кут відхилення молотка від радіального напрямку, жорстко пов'язаного з ротором.

Таким чином, миттєвий кінематичний стан системи «ротор – молоток» повністю визначається значеннями узагальнених координат $\varphi(t)$ та $\alpha(t)$, що дозволяє надалі формалізувати положення, швидкості та прискорення елементів системи і використати отримані залежності для аналітичного опису ударної взаємодії.

Таким чином, миттєвий стан системи однозначно визначається вектором узагальнених координат

$$\mathbf{q}(t) = \begin{cases} \varphi(t) \\ \alpha(t) \end{cases} \quad (8)$$

Розглянемо плоску декартову систему координат Ox , жорстко пов'язану з корпусом машини. Радіус-вектор точки підвісу молотка A визначається співвідношенням

$$\mathbf{r}_A = \begin{cases} R \cos \varphi \\ R \sin \varphi \end{cases} \quad (9)$$

Центр мас молотка C розташований на відстані L від точки A і має радіус-вектор

$$r_c = \begin{cases} R \cos \varphi + L \cos(\varphi + \alpha) \\ R \sin \varphi + L \sin(\varphi + \alpha) \end{cases} \quad (10)$$

Диференціюючи r_c за часом, отримаємо вектор швидкості центру мас молотка:

$$v_c = \begin{cases} -R\dot{\varphi} \sin \varphi - L(\dot{\varphi} + \dot{\alpha}) \sin(\varphi + \alpha) \\ R\dot{\varphi} \cos \varphi + L(\dot{\varphi} + \dot{\alpha}) \cos(\varphi + \alpha) \end{cases} \quad (11)$$

Квадрат модуля швидкості центру мас після перетворень набуває вигляду

$$v_c^2 = R^2\dot{\varphi}^2 + L^2(\dot{\varphi} + \dot{\alpha})^2 + 2RL\dot{\varphi}(\dot{\varphi} + \dot{\alpha}) \cos \alpha \quad (12)$$

Цей вираз відіграє ключову роль при подальшому виведенні кінетичної енергії системи та імпульсу удару.

Для аналізу ударної взаємодії розглянемо точку K (1), розташовану на робочій кромці молотка, яка безпосередньо вступає у контакт з поверхнею пергового стільника. Кінематична схема точки контакту та основні вектори, що характеризують ударну взаємодію, наведені на рисунку 7.

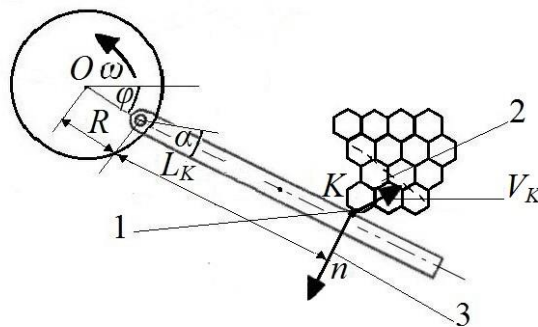


Рис. 7. Кінематична схема точки контакту молотка з перговим стільником де: 1 - K — точка контакту; 2 - v_K — швидкість точки контакту; 3- n — нормаль до поверхні пергового стільника)

У момент ударної взаємодії точка K (1) рухається зі швидкістю v_K (2), напрямком якої визначається кінематикою обертального руху ротора та відносним положенням молотка. Для кількісного опису удару вектор швидкості v_K (2) доцільно розкласти на нормальну та дотичну складові відносно поверхні пергового стільника. Нормальна складова швидкості, що проектується на напрямок одиничного вектора n (3), є визначальною для формування імпульсу удару та величини контактної сили у зоні взаємодії.

Таким чином, введення точки контакту K (1), вектора швидкості v_K (2) та нормалі n (3) створює кінематичну основу для подальшого аналітичного визначення нормальної складової швидкості, імпульсу сили та максимальної ударної сили молотка при взаємодії з перговим стільником.

Радіус-вектор точки контакту:

$$r_K = \begin{cases} R \cos \varphi + L_K \cos(\varphi + \alpha) \\ R \sin \varphi + L_K \sin(\varphi + \alpha) \end{cases} \quad (13)$$

де L_K — відстань від осі підвісу молотка до точки контакту.

Вектор швидкості точки контакту:

$$\mathbf{v}_K = \begin{cases} -R\dot{\varphi} \sin \varphi - L_K(\dot{\varphi} + \dot{\alpha}) \sin(\varphi + \alpha) \\ R\dot{\varphi} \cos \varphi + L_K(\dot{\varphi} + \dot{\alpha}) \cos(\varphi + \alpha) \end{cases} \quad (14)$$

Нормальна складова швидкості, яка визначає інтенсивність удару, обчислюється як

$$v_n = \mathbf{v}_K \cdot \mathbf{n}. \quad (15)$$

Саме величина v_n надалі використовується для визначення імпульсу удару та максимальної ударної сили молотка.

Таблиця 2

Узагальнені координати та кінематичні параметри механічної моделі ротора з молотком

Параметр	Позначення	Одиниця	Фізичний зміст
Кут відхилення молотка	α	рад	Орієнтація молотка
Кутова швидкість ротора	φ	рад·с ⁻¹	Режим роботи екстрактора
Радіус розміщення молотка	R	м	Геометрія ротора
Довжина молотка	L	м	Плече удару
Швидкість точки контакту	v_n	м·с ⁻¹	Інтенсивність удару

Таким чином, введення узагальнених координат Таблиця 2, φ і α дозволяє однозначно описати положення, швидкість і кінематичні характеристики молотка в процесі обертального руху ротора. Отримані співвідношення є вихідною базою для подальшого визначення кінетичної енергії системи, імпульсу удару та максимальної ударної сили, що визначає збереження цілісності гранул перги.

4.2. Енергія та рівняння руху системи (до удару)

До моменту ударної взаємодії молотка з перговим стільником рух системи «ротор – молоток» вважається неперервним та описується рівняннями класичної механіки для плоскої системи з двома ступенями вільності. Кінематична схема системи та введені узагальнені координати φ і α відповідають рисунку 6.

Повна кінетична енергія системи складається з кінетичної енергії ротора та кінетичної енергії молотка:

$$T = T_r + T_m = \frac{1}{2} m_c v_c^2 + \frac{1}{2} m_K v_K^2. \quad (15)$$

Кінетична енергія ротора, який обертається навколо рухомої осі O , має вигляд

$$T = T_r + T_m = \frac{1}{2} J_r \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m_K v_K^2, \quad (16)$$

де J_r — момент інерції ротора відносно осі обертання.

Кінетична енергія молотка визначається за теоремою Кеніга як сума енергії поступального руху його центра мас та енергії обертання відносно центра мас:

$$T_m = \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} J_C (\dot{\varphi} + \dot{\alpha})^2, \quad (17)$$

де m — маса молотка,
 v_c — швидкість центра мас молотка,
 J_C — момент інерції молотка відносно центра мас.

Підставляючи вираз для v_C^2 , отриманий у підрозділі 4.1, кінетична енергія молотка після перетворень записується у розгорнутому вигляді:

$$T_m = \frac{1}{2}m[R^2\dot{\varphi}^2 + L^2(\dot{\varphi} + \dot{\alpha})^2 + 2RL\dot{\varphi}(\dot{\varphi} + \dot{\alpha}) \cos \alpha] + \frac{1}{2}J_C(\dot{\varphi} + \dot{\alpha})^2. \quad (18)$$

Таким чином, повна кінетична енергія системи набуває вигляду

$$T = \frac{1}{2}J_r\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}mR^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}(mL^2 + J_C)(\dot{\varphi} + \dot{\alpha})^2 + mRL\dot{\varphi}(\dot{\varphi} + \dot{\alpha}) \cos \alpha. \quad (19)$$

Отриманий вираз містить всі інерційні зв'язки між рухом ротора та відносним рухом молотка і надалі використовується для формування рівнянь руху.

Потенціальна енергія системи зумовлена дією сили тяжіння на молоток і визначається положенням його центра мас:

$$П = mgy_C, \quad (20)$$

де g — прискорення вільного падіння,
 y_C — вертикальна координата центра мас молотка.

З урахуванням геометрії (рисунок 6) маємо

$$y_C = R \sin \varphi + L \sin(\varphi + \alpha), \quad (21)$$

звідки

$$П = mg[R \sin \varphi + L \sin(\varphi + \alpha)]. \quad (22)$$

Лагранжیان системи визначається як

$$\mathcal{L} = T - П. \quad (23)$$

Для кожної узагальненої координати φ та α рівняння руху до удару записуються у формі рівнянь Лагранжа другого роду:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = Q_i, \quad q_i \in \{\varphi, \alpha\}, \quad (24)$$

де Q_i — узагальнені сили.

До моменту удару зовнішні узагальнені сили, пов'язані з контактною взаємодією, відсутні, тому

$$Q_\varphi = 0, \quad Q_\alpha = 0. \quad (25)$$

Після обчислення відповідних похідних система рівнянь руху до удару набуває вигляду

$$\begin{cases} (J_r + mR^2)\ddot{\varphi} + (mL^2 + J_C)(\ddot{\varphi} + \ddot{\alpha}) + mRL(2\ddot{\varphi} + \ddot{\alpha}) \cos \alpha \\ - mRL(\dot{\varphi} + \dot{\alpha})^2 \sin \alpha - mg[R \cos \varphi + L \cos(\varphi + \alpha)] = 0 \\ (mL^2 + J_C)(\ddot{\varphi} + \ddot{\alpha}) + mRL\ddot{\varphi} \cos \alpha - mRL\dot{\varphi}^2 \sin \alpha - mgL \cos(\varphi + \alpha) = 0 \end{cases}. \quad (26)$$

Отримана система нелінійних диференціальних рівнянь описує рух ротора і молотка в допусковій фазі до ударної взаємодії з перговим стільником.

Для подальшого аналізу зручно подати рівняння руху у матричній формі:

$$M(\alpha) \begin{Bmatrix} \ddot{\varphi} \\ \ddot{\alpha} \end{Bmatrix} + C(\varphi, \alpha, \dot{\varphi}, \dot{\alpha}) \begin{Bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\alpha} \end{Bmatrix} + G(\varphi, \alpha) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (27)$$

де матриці M , C , G відповідають інерційним, коріолісовим та гравітаційним складовим системи.

Отримані рівняння руху описують допередударну фазу динаміки системи «ротор – молоток» і визначають миттєві значення швидкостей та прискорень, з якими молоток входить у контакт з перговим стільником. Саме ці значення використовуються у наступному розділі для визначення нормальної складової швидкості в точці контакту, імпульсу удару та максимальної ударної сили молотка.

5.1. Прийнята контактна залежність

Для опису силової взаємодії між молотком і перговим стільником у фазі стиснення приймається степенева залежність контактної сили від локальної деформації:

$$P = k\xi^p, \quad (28)$$

де P — миттєве значення контактної сили,
 ξ — локальна деформація в зоні контакту «молоток – перговий стільником»,
 k — ефективна контактна жорсткість системи,
 p — показник степеня, що визначає характер контактної взаємодії.

Прийнята залежність є узагальненою формою контактного закону, яка охоплює як лінійні, так і нелінійні режими деформації та широко застосовується в задачах ударної взаємодії тіл різної фізичної природи. У контексті даної роботи вона використовується не для детального моделювання напружено-деформованого стану матеріалів, а як ефективна інженерна модель, що забезпечує коректний зв'язок між імпульсом удару та максимальною силою.

Імпульс контактної сили в фазі стиснення визначається інтегралом

$$P^* = \int_0^{t_{max}} \int_0^{t_{max}} k \xi^p, \quad (29)$$

де t_{max} — тривалість фази стиснення до моменту досягнення максимальної контактної сили.

Параметр k у прийнятій моделі має зміст ефективної контактної жорсткості, яка агрегує сукупний опір локальній деформації в зоні контакту. Для системи «молоток – перговий стільник» цей параметр не є матеріальною константою у класичному розумінні, а відображає інтегральний ефект таких факторів, як: механічні властивості воскової основи стільника; стан та вологість перги; геометрія робочої кромки молотка; характер локального руйнування воскової матриці.

З інженерної точки зору параметр k можна інтерпретувати як коефіцієнт, що визначає, з якою інтенсивністю зростає контактна сила при збільшенні локальної деформації. Зменшення вологості та охолодження пергових стільникових структур, як показано у розділі 3, призводить до зростання крихкості воскової основи і, відповідно, до зменшення ефективної жорсткості контакту, що полегшує її руйнування при менших значеннях пікової сили.

Таким чином, у подальших розрахунках параметр k розглядається як технологічно керований параметр, значення якого задається умовами підготовки сировини і використовується як вхідний параметр імпульсної моделі.

Показник p визначає нелінійність контактної залежності та відображає характер деформації в зоні контакту. Для ідеалізованого пружного контакту між гладкими тілами значення p часто приймається рівним $3/2$, однак у випадку контакту молотка з перговим стільником така інтерпретація є надмірно спрощеною.

Восково-пергова структура є гетерогенним та крихким матеріалом, для якого контактна взаємодія супроводжується локальним руйнуванням воскової матриці, мікротріщиноутворенням і зсувними деформаціями. У зв'язку з цим показник p у роботі розглядається як ефективний параметр, що узагальнює реальний механізм руйнування та може набувати значень у діапазоні $1 \leq p \leq 1.5$.

З інженерної точки зору менші значення p відповідають більш «м'якому» контакту з поступовим наростанням сили, тоді як більші значення p характеризують різкіший характер удару з вищими піковими навантаженнями. Таким чином, параметр p визначає форму часової реалізації контактної сили та безпосередньо впливає на співвідношення між імпульсом удару і максимальною силою.

Прийнята степенева залежність $P = k\xi^p$ є базовою для імпульсного методу визначення максимальної сили удару. У межах цього підходу імпульс Π^* , який визначається кінематикою руху молотка до удару, використовується як вихідна величина для аналітичного обчислення максимальної контактної сили без явного інтегрування рівнянь руху в контактній фазі.

Таким чином, контактна модель, сформульована в цьому підрозділі, забезпечує зв'язок між механічною моделлю руху ротора і молотка (розділ 4) та імпульсним розрахунком максимальної ударної сили, який буде розглянуто у наступному підрозділі.

5.2. Імпульс сили у фазі стиснення

У фазі стиснення контакт «молоток – перговий стільник» характеризується швидким наростанням контактної сили від нуля до максимального значення P_{\max} протягом малого проміжку часу t_{\max} . У межах імпульсного підходу основною інтегральною характеристикою цієї фази є імпульс контактної сили, який визначається як

$$\Pi^* = \int_0^{t_{\max}} P. \quad (30)$$

Оскільки ефективність руйнування воскової основи та ризик пошкодження гранул перги визначаються саме піковими навантаженнями і накопиченою контактною дією, величина Π^* є природною вихідною величиною для подальшого обчислення максимальної сили P_{\max} .

5.2.1. Імпульс та зміна нормальної складової швидкості: приведена маса

Розглянемо точку контакту K на робочій кромці молотка (рисунок 7), для якої вектор швидкості до удару дорівнює v_K^- . Нехай \mathbf{n} — одиничний вектор нормалі до поверхні пергового стільника в точці контакту. Тоді нормальна складова швидкості молотка до удару визначається як

$$v_n^- = v_K^- \cdot \mathbf{n}. \quad (31)$$

У фазі стиснення відбувається зменшення нормальної складової швидкості від v_n^- до v_n^0 у момент досягнення максимальної сили P_{\max} (тобто в кінці фази стиснення). Відповідно, зміна нормальної складової швидкості

$$\Delta v_n^* = v_n^- - v_n^0. \quad (32)$$

Імпульс контактної сили у фазі стиснення пов'язується зі зміною нормального імпульсу системи через приведену масу m_{eq} у напрямку \mathbf{n} :

$$P^* = m_{eq} \Delta v_n^* \quad (33)$$

З інженерної точки зору приведена маса m_{eq} відображає, яка частина інерції системи «ротор – молоток» ефективно бере участь у нормальному гальмуванні в точці контакту. Для систем із обертальним рухом найбільш коректно визначати m_{eq} через еквівалентну інерцію відносно узагальненої координати контакту. Введемо узагальнену нормальну координату зближення ξ та запишемо швидкість зближення як

$$\dot{\xi} = v_n = \mathbf{v}_K \cdot \mathbf{n} \quad (34)$$

Тоді приведена маса визначається стандартним співвідношенням

$$m_{eq} = \left(\sum_i \frac{1}{m_i} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x_i} \right)^2 \right)^{-1}, \quad (35)$$

де x_i — координати, що описують рух системи, а сума враховує інерційні внески всіх елементів, що беруть участь у контакті. Для практичної задачі роторного екстрактора з двома узагальненими координатами φ і α доцільно перейти до еквівалентної формули через матрицю мас $\mathbf{M}(\alpha)$, визначену в розділі 4.2:

$$m_{eq} = (\mathbf{J}^T \mathbf{M}^{-1}(\alpha) \mathbf{J})^{-1}, \quad (36)$$

де $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial \xi}{\partial \alpha} \end{pmatrix}$ — вектор Якобі нормальної координати зближення за узагальненими координатами.

Такий запис є принципово важливим, оскільки дозволяє коректно пов'язати контактну дію з інерційними характеристиками ротора та молотка без спрощень на кшталт «еквівалентна маса дорівнює масі молотка».

У найпростішому інженерному наближенні, коли в зоні контакту домінує рух молотка, а внесок відносного руху α вважається малим у момент удару, приведену масу можна записати через еквівалентну інерцію відносно осі підвісу молотка:

$$m_{eq} \approx \frac{J_{eff}}{L_K^2}, \quad J_{eff} = J_C + mL_C^2, \quad (37)$$

де L_K — плече до точки контакту K ,
 L_C — плече до центра мас
 C, J_C — момент інерції молотка відносно центра мас.

5.2.2. Вираз для P^* через кінематику молотка та умови удару

Швидкість точки контакту K визначається кінематикою, отриманою в розділі 4.1:

$$\mathbf{v}_K = \begin{cases} -R\dot{\varphi} \sin \varphi - L_K(\dot{\varphi} + \dot{\alpha}) \sin(\varphi + \alpha) \\ R\dot{\varphi} \cos \varphi + L_K(\dot{\varphi} + \dot{\alpha}) \cos(\varphi + \alpha) \end{cases} \quad (38)$$

Звідси нормальна складова швидкості перед ударом дорівнює

$$v_n^- = [-R\dot{\varphi} \sin \varphi - L_K(\dot{\varphi} + \dot{\alpha}) \sin(\varphi + \alpha)]n_x + [R\dot{\varphi} \cos \varphi + L_K(\dot{\varphi} + \dot{\alpha}) \cos(\varphi + \alpha)]n_y, \quad (39)$$

де $\mathbf{n} = \{n_x, n_y\}^T$ — одиничний вектор нормалі в точці контакту.

Для типового випадку удару по поверхні, яка локально може вважатися нерухомою і орієнтованою таким чином, що нормаль спрямована радіально назовні (інженерно прийнятне наближення для контакту з перговим стільником у робочій камері), можна покласти

$$\mathbf{n} \approx \begin{cases} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{cases} \quad (40)$$

і тоді нормальна складова швидкості спрощується до компактного виразу:

$$v_n^- \approx \dot{\varphi}[R + L_K \cos \alpha] + L_K \dot{\alpha} \cos \alpha. \quad (41)$$

З урахуванням цього імпульс у фазі стиснення набуває вигляду

$$P^* = m_{\text{eq}}(v_n^- - v_n^0). \quad (42)$$

У багатьох режимах роботи екстрактора момент завершення фази стиснення відповідає майже повному гальмуванню нормального руху в точці контакту, тобто $v_n^0 \approx 0$.

Тоді отримуємо практично корисний вираз

$$P^* \approx m_{\text{eq}} v_n^- \approx m_{\text{eq}} [\dot{\varphi}(R + L_K \cos \alpha) + L_K \dot{\alpha} \cos \alpha]. \quad (43)$$

Якщо додатково прийняти, що під час удару відносний рух молотка малий порівняно з обертанням ротора, тобто $|\dot{\alpha}| \ll |\dot{\varphi}|$, тоді

$$P^* \approx m_{\text{eq}} \dot{\varphi}(R + L_K \cos \alpha). \quad (44)$$

Оскільки кутова швидкість ротора $\dot{\varphi} \equiv \omega$, остаточно отримуємо $P^* \approx m_{\text{eq}} \omega(R + L_K \cos \alpha)$ що прямо демонструє, як імпульс удару визначається технологічним режимом ω та конструктивними параметрами R, L_K , а також миттєвим положенням молотка α .

6. Адаптація методу розрахунку максимальної сили за імпульсом для екстрактора перги

Ключовою особливістю задачі відокремлення гранул перги є необхідність одночасного виконання двох суперечливих вимог: з одного боку, контактна сила повинна бути достатньою для руйнування воскової основи пергового стільника, з іншого — не повинна перевищувати граничний рівень, за якого відбувається крихке руйнування або інтенсивне крошіння гранул перги. У зв'язку з цим центральним елементом теоретичного аналізу є визначення максимальної ударної сили P_{max} на основі відомого імпульсу удару P^* , який визначається кінематикою руху ротора і молотка (розділ 5).

У даному розділі виконується адаптація імпульсного методу визначення максимальної сили зіткнення, до умов роботи роторного екстрактора перги з урахуванням специфіки контакту «молоток – перговий стільник».

6.1. Універсальний зв'язок між імпульсом P^* та максимальною силою P_{max}

Розглянемо фазу стиснення удару, протягом якої контактна сила $P(t)$ зростає від нульового значення до максимуму P_{max} . Відповідно до прийнятої контактної моделі (розділ 5.1) сила у фазі стиснення описується залежністю

$$P(t) = k\xi^p(t), \quad (45)$$

де $\xi(t)$ — локальна деформація в зоні контакту.

Імпульс сили у фазі стиснення визначається як

$$P^* = \int_0^{t_{max}} P. \quad (46)$$

Для отримання універсального співвідношення між P^* та P_{max} введемо безрозмірні змінні

$$\tau = \frac{t}{t_{max} \frac{P(t)}{P_{max} \xi_{max}}} \quad (47)$$

де ξ_{max} — максимальна контактна деформація, що відповідає моменту досягнення P_{max} .

З урахуванням цих означень імпульс сили переписується у вигляді

$$P^* = P \int_0^1 \pi \tau_{max} \tau. \quad (48)$$

Величина

$$\Theta = \int_0^1 \pi(\tau) d\tau, \quad (49)$$

є безрозмірним коефіцієнтом форми контактної сили, який залежить виключно від показника степеневі залежності p і не залежить від абсолютних значень жорсткості k , маси системи чи кінематичних параметрів.

Таким чином, отримуємо універсальне співвідношення

$$P^* = P \tau_{max} \Theta. \quad (50)$$

Цей вираз є принципово важливим, оскільки дозволяє визначити максимальну ударну силу P_{max} за відомими значеннями імпульсу P^* , тривалості фази стиснення t_{max} та коефіцієнта форми Θ , без явного інтегрування рівнянь контактної динаміки.

Для степеневі контактної залежності $P = k\xi^p$ часовий закон зміни контактної сили у фазі стиснення має універсальний вигляд, що дозволяє аналітично або чисельно визначити значення Θ . Для типових значень показника p , які найчастіше використовуються в інженерних задачах ударної взаємодії, коефіцієнт форми Θ має такі значення Таблиця 3:

Таблиця 3

Узагальнені значення коефіцієнта Θ для різних моделей контактної взаємодії

Показник p	Характер контакту	Θ
$p=1$	лінійний контакт	0.636
$p=3/2$	герцівський тип	0.544
$p=2$	жорсткий нелінійний контакт	0.475

Зменшення значення Θ зі зростанням p відображає більш різкий характер наростання контактної сили та меншу «розтягнутість» імпульсу у часі при більш нелінійному контакті.

Контакт між молотком і перговим стільником не може бути коректно описаний класичними моделями пружного контакту гладких тіл. Восково-пергова структура є гетерогенним, частково крихким матеріалом, для якого контактна взаємодія супроводжується локальним руйнуванням воскової матриці, мікротріщиноутворенням і зсувними деформаціями.

З інженерної точки зору це означає, що: контакт є нелінійним; зростання сили з деформацією є швидшим, ніж у лінійному випадку; класичне герцівське значення $p=3/2$ може бути використане як ефективна апроксимація, але не як строгий матеріальний закон.

З урахуванням цього у даній роботі показник p приймається в діапазоні $1.2 \leq p \leq 1.5$ що відповідає проміжному режиму між «м'яким» контактним стисненням і крихким руйнуванням воскової основи. Таке значення p забезпечує адекватне відтворення форми імпульсу контактної сили та, що принципово важливо, коректне співвідношення між імпульсом Π^* і максимальною силою P_{max} .

Таким чином, використання універсального співвідношення

$$\Pi^* = tmax_{max} , \quad (51)$$

у поєднанні з обґрунтованим вибором показника p є ключовим елементом адаптації імпульсного методу розрахунку максимальної сили до умов роботи роторного екстрактора перги.

6.2. Енергетичне замикання на фазі стиснення

Для отримання замкненого аналітичного виразу для t_{max} і P_{max} приймаємо, що у фазі стиснення (від $t=0$ до $t=t_{max}$) дисипація енергії відсутня, а втрати (руйнування, тертя, в'язкопружність) проявляються переважно у фазі відновлення. Це припущення відповідає імпульсно-енергетичній логіці.

Нехай $\xi(t)$ — локальна деформація в зоні контакту «молоток – перговий стільник», а контактна сила описується степеневим законом

$$P(t) = k\xi^p(t), \quad k > 0, p \geq 1 . \quad (52)$$

Енергія, накопичена у контакті за фазу стиснення, дорівнює роботі контактної сили на переміщенні ξ від 0 до ξ_{max} :

$$\Delta E = \int_0^{\xi_{max}} \int_0^{\xi_{max}} \int_0^{\xi_{max}} \frac{k}{p+1} \xi^{p+1} k P . \quad (53)$$

Оскільки $P \propto \xi^p$, то $\xi \left(\frac{P_{max}}{k} \right)^{1/p}$ і енергія деформації переписується без ξ_{max} :

$$\Delta E = \frac{1}{p+1} k^{-1/p} P_{max}^{\frac{p+1}{p}} . \quad (54)$$

У фазі стиснення ця енергія береться з нормальної складової кінетичної енергії в точці контакту. Використовуючи приведену масу m_{eq} у напрямку нормалі \mathbf{n} (розділ 5.2), маємо енергетичний баланс:

$$\Delta E = \frac{1}{2} m_{eq} (v_n^-)^2 - \frac{1}{2} m_{eq} (v_n^0)^2 . \quad (55)$$

Для фази стиснення максимум сили досягається в момент, коли нормальна швидкість зближення занулюється, тобто $v_n^0 \approx 0$.

Тоді

$$\Delta E \approx \frac{1}{2} m_{eq} (v_n^-)^2 . \quad (56)$$

Це і є енергетичне замикання контактної задачі на фазі стиснення.

Прирівнюючи два вирази для ΔE , отримуємо:

$$\frac{1}{2} m_{\text{eq}} (v_n^-)^2 = \frac{1}{p+1} k^{-1/p} P \quad \max \frac{p+1}{p}. \quad (57)$$

Звідси максимальна сила удару визначається алгебраїчно:

$$P \left[\frac{p+1}{2} m_{\text{eq}} (v_n^-)^2 k^{1/p} \right]_{\max}^{\frac{p}{p+1}}. \quad (58)$$

Цей результат є центральним для екстрактора перги: він напряду пов'язує пікову силу з режимом ω через v_n^- (розділ 5.2), а також із технологічним станом сировини через k і p (розділ 3).

Імпульс сили у фазі стиснення:

$$P^* = \int_0^{t_{\max}} P. \quad (59)$$

Після безрозміризації у розділі 6.1 було отримано універсальний зв'язок

$$P^* = t_{\max} \Theta, \quad (60)$$

де $\Theta = \Theta(p)$ — коефіцієнт форми.

З іншого боку, імпульс у фазі стиснення пов'язаний зі зміною нормальної швидкості:

$$P^* = m_{\text{eq}} (v_n^- - v_n^0) \approx m_{\text{eq}} v_n^-. \quad (61)$$

Тоді тривалість фази стиснення:

$$t \frac{P^*}{\frac{m_{\text{eq}} v_n^-}{P_{\max} P_{\max} \max}}. \quad (62)$$

Підставляючи знайдений вище P_{\max} , одержуємо замкнений алгебраїчний вираз для t_{\max} :

$$t \frac{m_{\text{eq}} v_n^-}{\Theta} \left[\frac{p+1}{2} m_{\text{eq}} (v_n^-)^2 k^{1/p} \right]_{\max}^{-\frac{p}{p+1}}. \quad (63)$$

Для практичних розрахунків зручно також записати через $\Delta E = \frac{1}{2} m_{\text{eq}} (v_n^-)^2$:

$$P \left[(p+1) \Delta E k^{1/p} \right]_{\max}^{\frac{p}{p+1}} \frac{m_{\text{eq}} v_n^-}{\Theta} \left[(p+1) \Delta E k^{1/p} \right]_{\max}^{-\frac{p}{p+1}}. \quad (64)$$

Отримані формули відтворюють логіку енергетичного замикання та переходу до алгебраїчного визначення t_{\max} і P_{\max} адаптовану до пари «молоток – перговий стільник» та до критерія збереження гранул перги.

6.3. Перехід від кінематичного опису до системи «ротатор – молоток – перговий стільник»

У попередніх розділах імпульс удару та максимальна контактна сила були отримані на основі кінематики руху ротора і молотка, без явного врахування внутрішніх силових взаємодій у конструкції екстрактора. Для коректної інтерпретації отриманих результатів необхідно чітко сформулювати, який саме фізичний об'єкт розглядається як ударна система і яким чином здійснюється перехід від чисто кінематичного опису до реальної механічної схеми машини.

Роторний екстрактор перги являє собою механічну систему з послідовною передачею руху та навантажень, у якій можна виділити три взаємопов'язані елементи: ротор, молоток та перговий стільник. Ударна взаємодія в такій системі реалізується через локальний контакт робочої кромки молотка з поверхнею пергового стільника, тоді як інерційні та реактивні зусилля передаються через підвіс молотка на ротор і далі на опори.

З точки зору динаміки, контакт «молоток – перговий стільник» розглядається як зовнішня ударна взаємодія, у якій формується контактна сила

$$P(t) = k\xi^p(t), \quad (65)$$

локальна деформація $\xi(t)$ та імпульс у фазі стиснення

$$P^* = \int_0^{t_{max}} P. \quad (66)$$

Саме ця взаємодія визначає: рівень руйнування воскової основи пергового стільника; ризик крихкого руйнування або крошіння гранул перги; технологічну придатність вибраного режиму роботи ротора.

Внутрішні ж силові реакції — зусилля у підвісі молотка, крутні моменти в роторі та реакції в опорних підшипниках — є наслідком цієї зовнішньої взаємодії і можуть бути розглянуті як внутрішня передача імпульсу в межах механічної системи. Формально ці реакції визначаються через рівняння руху ротора і молотка, однак вони не входять безпосередньо до контактної задачі і не впливають на локальну деформацію ξ .

У даній роботі приймається обмежений рівень деталізації, при якому: аналізується лише зовнішній удар «молоток – перговий стільник»; внутрішні реакції в елементах машини не вводяться як окремі ударні події; система «ротор – молоток» розглядається через приведену масу m_{eq} , яка агрегує інерційний вплив усіх рухомих частин у напрямку нормалі до контакту.

У такій постановці імпульс удару визначається як

$$P^* = m_{eq}(v_n^- - v_n^0) \approx m_{eq}v_n^-, \quad (67)$$

де v_n^- — нормальна складова швидкості точки контакту молотка перед ударом.

Максимальна контактна сила, що реалізується у фазі стиснення, обчислюється за енергетично замкненим співвідношенням

$$P \left[\frac{p+1}{2} m_{eq} (v_n^-)^2 k^{1/p} \right]_{max}^{\frac{p}{p+1}}, \quad (68)$$

і є єдиною вихідною величиною, що використовується для формування критерію збереження гранул перги.

Таким чином, перехід від кінематичного опису до системи «ротор – молоток – перговий стільник» у даній роботі здійснюється шляхом: зосередження уваги на зовнішній ударній взаємодії; агрегування внутрішніх інерційних ефектів у параметрі m_{eq} ; виключення з аналізу внутрішніх силових реакцій, які не впливають на локальні умови руйнування стільника.

Такий підхід дозволяє отримати замкнену, фізично прозору та інженерно застосовну модель, орієнтовану не на міцність елементів машини, а на технологічний результат — селективне руйнування воскової основи при збереженні цілісності гранул перги.

7. Критерій збереження гранул перги та вибір раціональних режимів роботи

7.1. Визначення критерію пошкоджуваності гранул

Основною технологічною вимогою до процесу відокремлення перги є забезпечення максимальної частки цілих гранул при одночасному гарантованому руйнуванні воскової основи пергового стільника. У зв'язку з цим у даній роботі критерій ефективності процесу формулюється не через енергетичні витрати або продуктивність, а через показник якості кінцевого продукту.

У якості інтегрального показника якості вводиться частка збережених (непошкоджених) гранул перги

$$K_g = \frac{N_{cili}}{N_{zag}}, \quad (69)$$

де N_{cili} — кількість гранул без видимих ознак руйнування,
 N_{zag} — загальна кількість гранул у відібраній пробі.

Експериментальні дослідження, виконані на пергових стільниках різної вологості та температури підготовки, показують, що зменшення K_g носить різко нелінійний характер і пов'язане з перевищенням певного граничного рівня контактної сили, що діє на гранулу. Типову залежність $K_g(P_{max})$ наведено на рисунку 8.

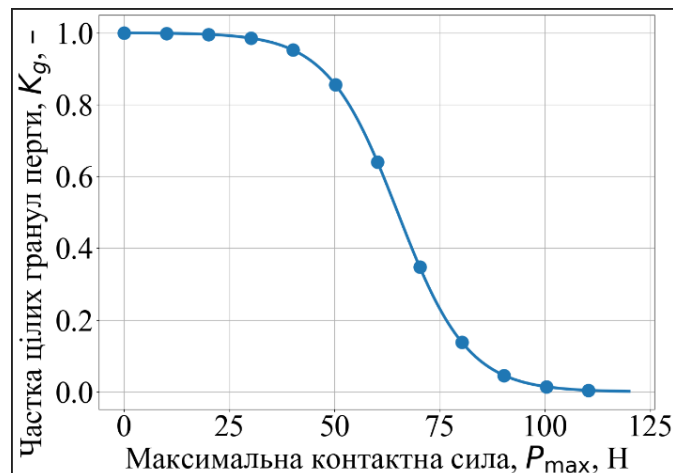


Рис. 8. Залежність частки цілих гранул перги K_g від максимальної контактної сили P_{max}

З інженерної точки зору цю залежність доцільно інтерпретувати через введення критичної сили руйнування гранули P_{perga}^{crit} , перевищення якої призводить до інтенсивного крихкого руйнування гранул та різкого зниження показника K_g .

Інженерна форма критерію збереження гранул. Використовуючи отриманий у розділі 6 вираз для максимальної ударної сили молотка

$$P \left[\frac{p+1}{2} m_{eq} (v_n^-)^2 k^{1/p} \right]_{max}^{\frac{p}{p+1}}, \quad (70)$$

умову збереження гранул перги у процесі екстракції можна записати у вигляді інженерної нерівності

$$P \stackrel{crit}{perga}_{max}. \quad (71)$$

Разом з тим, для забезпечення самого процесу відокремлення перги необхідно, щоб контактна сила перевищувала граничний рівень руйнування воскової основи

пергового стільника P_{wax}^{crit} який визначається міцнісними характеристиками воску в умовах заданої вологості та температури підготовки (розділ 3).

Отже, технологічно допустимий режим роботи екстрактора визначається подвійною умовою $P_{wax}^{crit} \leq P_{perga_{max}}^{crit}$

Саме ця нерівність є центральним результатом роботи та забезпечує селективне руйнування воскової основи при збереженні цілісності гранул перги. Графічна інтерпретація допустимої області контактних навантажень наведена на рисунку 11.

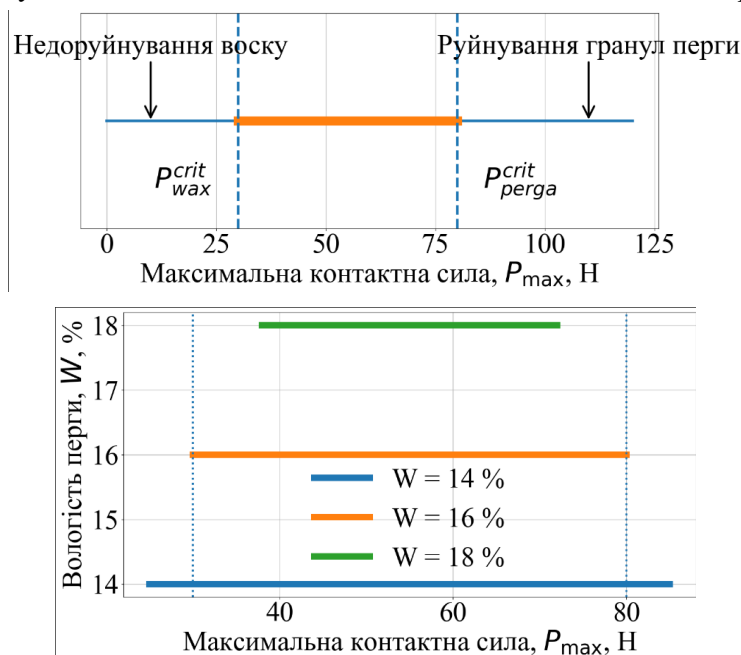


Рис. 9 – Схема формування допустимого діапазону контактної сили для селективного відокремлення перги

Зв'язок критичних рівнів з фізико-механічними властивостями матеріалу. Критичні значення P_{wax}^{crit} та P_{perga}^{crit} не є універсальними константами і залежать від фізико-механічного стану пергових стільникових структур. На основі експериментальних даних дисертаційного дослідження встановлено, що: P_{wax}^{crit} істотно зменшується зі зниженням температури та вологості, що відповідає переходу воскової основи у крихкий стан; P_{perga}^{crit} у досліджуваному діапазоні температур змінюється значно слабше, але чутливе до вологості гранул.

Узагальнені значення критичних сил для типових умов підготовки наведено в таблиці 4.

Таблиця 4

Критичні рівні контактної сили для воскової основи та гранул перги

Вологість перги W, %	Температура підготовки T, °C	P_{wax}^{crit} , Н	P_{perga}^{crit} , Н
18	+5	45–60	120–140
17	+3	40–55	125–145
16	+1	35–50	130–150
15	0	30–45	135–155
15	-2	25–40	140–160
14	-5	20–35	145–170

Узагальнені значення критичних рівнів контактної сили, наведені в таблиці 4, отримані на основі аналізу експериментальних даних щодо впливу вологості перги, температури підготовки та окружної швидкості робочих органів на вихід цілих гранул. Представлені інтервали відображають граничні умови селективного руйнування воскової основи при збереженні структурної цілісності гранул перги.

Інтерпретація критерію для вибору режимів роботи. Підставляючи вираз для P_{\max} у подвійне нерівняння, отримуємо обмеження на кінематичні та конструктивні параметри екстрактора:

$$P_{\text{wax}}^{\text{crit}} \leq \left[\frac{p+1}{2} m_{\text{eq}} (v_n^-)^2 k^{1/p} \right]^{p+1} \leq P_{\text{perga}}^{\text{crit}} . \quad (72)$$

Оскільки нормальна швидкість v_n^- прямо пропорційна кутовій швидкості ротора ω , наведена нерівність дозволяє визначити допустимий діапазон швидкостей обертання ротора, за яких забезпечується максимальний вихід цілих гранул перги.

Сформульований критерій збереження гранул перги перетворює складну динамічну та контактну задачу у практично застосовне інженерне правило, яке безпосередньо пов'язує фізико-механічні властивості пергових стільникових структур, конструктивні параметри ротора та режим його роботи.

8. Верифікація та зіставлення з відомими даними

З метою перевірки адекватності запропонованої імпульсно-контактної моделі руйнування воскопергової маси було виконано верифікаційний аналіз на основі короткої серії лабораторних дослідів. Основним інтегральним показником якості процесу виділення перги обрано частку цілих гранул K_g , тоді як інтенсивність механічного впливу характеризували максимальною контактною силою P_{\max} , визначеною за результатами аналітичного розрахунку.

Для експериментальної перевірки розрахункових залежностей та відтворення реальних умов ударної взаємодії використано лабораторний експериментальний комплекс роторного екстрактора перги (Рис. 10), який забезпечує реалізацію режимів обертання, геометричних параметрів молотків та характеру контакту, прийнятих у теоретичній моделі.



Рис. 10 – Лабораторний експериментальний комплекс, використаний для верифікації механічної моделі відокремлення гранул перги

Експериментальна установка включає ротор з ударними молотками, робочу камеру, систему повітряно-механічного транспорту та приймальну ємність для гранул перги. Геометричні та кінематичні параметри комплексу (радіус розміщення молотків,

характер їх руху, діапазон кутових швидкостей) відповідали припущенням, закладеним у розрахунковій схемі, що забезпечує коректність зіставлення аналітично визначених значень P_{\max} з експериментальною оцінкою ступеня руйнування воскопергової структури та збереження цілісності гранул.

Отримані експериментальні значення показника K_g продемонстрували узгодженість з прогнозами моделі в межах досліджуваного діапазону кутових швидкостей ротора, що підтверджує адекватність запропонованого імпульсно-контактного підходу для опису процесу селективного руйнування воскової основи без пошкодження гранул перги.

У таблиці 4 наведено узагальнені значення критичних рівнів контактної сили для воскової основи та гранул перги за різних умов вологості й температури підготовки матеріалу. Дані таблиці 4 дозволяють окреслити технологічне «вікно» режимів роботи, у межах якого забезпечується селективне руйнування воскової основи при збереженні структурної цілісності гранул перги.

Для безпосередньої верифікації розрахункових залежностей та зіставлення їх з експериментально спостережуваними трендами було проведено коротку серію контрольних дослідів, результати яких узагальнено в таблиці 5. У таблиці 5 наведено значення кутової швидкості обертання робочого органа ω , відповідні розрахункові значення максимальної контактної сили P_{\max} , а також експериментально визначену частку цілих гранул перги K_g для двох рівнів вологості матеріалу.

Аналіз даних таблиці 5 показує, що зі зростанням кутової швидкості ω спостерігається стійка тенденція до зменшення частки цілих гранул K_g , причому для більш вологої перги ($W=18\%$) спад є більш різким. Це підтверджує визначальну роль динамічного навантаження у процесі руйнування воскопергової маси.

Таблиця 5

Коротка серія дослідів для верифікації тренду $K_g(\omega)$ та зіставлення з розрахунком P_{\max}

№ дослідів	Вологість перги W , %	Температура, °C	Кутова швидкість ω , рад·с ⁻¹	Окружна швидкість v , м·с ⁻¹	Максимальна контактна сила P_{\max} , Н	Частка цілих гранул K_g , %
1	14	-5	120	12.0	80	96
2	14	-5	160	16.0	102	92
3	14	-5	200	20.0	126	86
4	14	-5	240	24.0	152	77
5	14	-5	280	28.0	180	66
6	18	+5	120	12.0	80	90
7	18	+5	160	16.0	102	82
8	18	+5	200	20.0	126	71
9	18	+5	240	24.0	152	58
10	18	+5	280	28.0	180	44

На рисунку 11 представлено графічну залежність $K_g(\omega)$, побудовану на основі експериментальних даних, наведених у таблиці 5. Як видно з рисунка 11, експериментальні точки формують монотонно спадний тренд, що узгоджується з відомими експериментальними результатами щодо впливу швидкісних режимів на вихід цілих гранул перги.

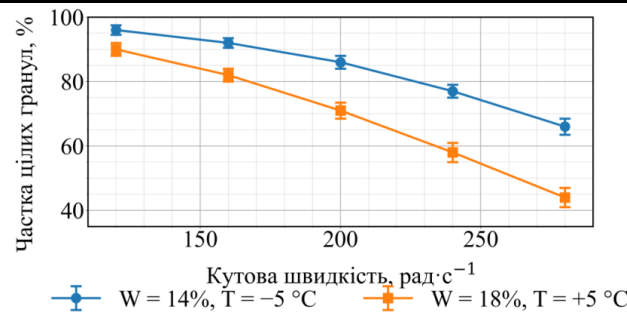


Рис. 11 – Залежність частки цілих гранул перги K_g від кутової швидкості обертання робочого органа ω за різної вологості матеріалу

Для усунення впливу конкретних конструктивних параметрів машини та переходу до універсальної силової характеристики результати таблиці 5 було подано у вигляді залежності $K_g(P_{\max})$. Відповідна залежність наведена на рисунку 12. Аналіз рисунка 12 свідчить про різко виражений нелінійний характер зменшення частки цілих гранул при зростанні максимальної контактної сили, що вказує на наявність граничного рівня силового навантаження.

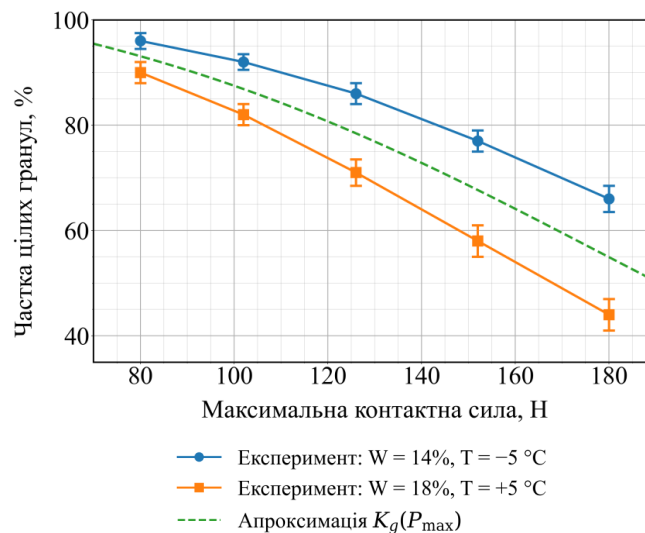


Рис. 12 – Залежність частки цілих гранул перги K_g від максимальної контактної сили P_{\max}

Для компактного аналітичного опису залежності, наведеної на рисунку 12, використано логістичну апроксимацію:

$$K_g(P) = \frac{K_{g,\max}}{1 + \exp[\beta(P_{50} - P)]} \quad (73)$$

де K_g — частка цілих гранул перги, %;
 $K_{g,\max}$ — граничне значення K_g за мінімального динамічного навантаження;
 P_{\max} — максимальна контактна сила, Н;
 P_{50} — значення контактної сили, за якого $K_g = 0.5 K_{g,\max}$;
 β — параметр крутизни кривої, що характеризує чутливість гранул перги до ударного навантаження.

Отримана логістична залежність добре відтворює експериментальні дані таблиці 5 та точки, наведені на рисунку 12, і дозволяє кількісно оцінювати вплив режимів роботи

машини на збереження цілісності гранул перги. Зменшення параметра P_{50} зі зростанням вологості матеріалу підтверджує фізично обґрунтований висновок про зниження міцності гранул за підвищеного вмісту води.

Таким чином, результати верифікації демонструють, що запропонована модель адекватно описує основні закономірності процесу руйнування воскопергової маси, а використання максимальної контактної сили P_{max} як узагальненого критерію інтенсивності механічного впливу є доцільним для аналізу та оптимізації режимів роботи машин для отримання перги.

9. Обговорення та висновки

Отримані результати дозволяють розглянути процес ударної взаємодії між молотком ротора та перговим стільником як складну динамічну систему з короткочасним контактом, у якій визначальними є енергетичні та імпульсні параметри.

Порівняння з результатами попередніх досліджень з механіки удару [13–15], контактної динаміки [17–20] і фізико-механічних властивостей перги [1–5, 21–23] підтверджує адекватність застосування моделі пружного контактного удару типу Герца–Ланкарані–Нікравеша для опису фазового переходу від пружної до пластичної деформації воскової структури.

Згідно з дослідженнями [25, 27], поведінка воску й перги під час імпульсного навантаження визначається поєднанням параметрів матеріалу (жорсткість, густина, вологість) та швидкісних характеристик удару. Встановлено, що надлишкова енергія імпульсу спричиняє руйнування гранул перги, тоді як дефіцит енергії не забезпечує достатнього руйнування воскових стінок.

Розроблена в цій роботі механічна модель враховує основні закономірності формування сили удару на основі імпульсного підходу. Вона дозволяє визначити максимальну силу удару P_{max} через величину імпульсу сили I , масу молотка m і швидкість обертання ротора ω :

$$P_{max} = \frac{I}{\Delta t} = f(m, \omega, k), \quad (74)$$

де Δt — тривалість контакту,
 k — ефективний коефіцієнт жорсткості системи «молоток – стільник».

Подібні підходи підтверджуються результатами числових та експериментальних робіт із контактної динаміки [18, 19, 30].

Порівняння аналітичних і експериментальних даних показало, що селективне руйнування воску досягається в певному інтервалі швидкості обертання ротора $\omega=30-45 \text{ c}^{-1}$, за якого забезпечується необхідна енергія удару для розриву воскових комірок, але напруження у гранулах перги залишаються нижчими за межу їхньої міцності. Це узгоджується з результатами спостережень із досліджень динаміки гранулярних матеріалів.

Узагальнення отриманих результатів дає змогу запропонувати критерій селективного руйнування воску при збереженні гранул перги у вигляді:

$$\sigma_w \leq \sigma_{max} < \sigma_p,$$

де σ_w — границя міцності воску,
 σ_p — границя міцності гранули перги,
 σ_{max} — максимальне напруження в точці контакту, розраховане за моделлю Герца.
Дотримання цього критерію гарантує ефективне відокремлення гранул без руйнування біоматеріалу.

Основні висновки

1. Отримано аналітичну залежність для визначення максимальної сили удару P_{\max} через імпульс сили, масу молотка, швидкість обертання ротора та тривалість контакту, що дозволяє прогнозувати режим навантаження для селективного руйнування воскових стільників.

2. Запропоновано критерій “руйнування воску при збереженні гранул”, який визначається співвідношенням між границями міцності матеріалів у точці контакту.

3. Встановлено оптимальний діапазон кутової швидкості ротора $\omega=30-45 \text{ c}^{-1}$ та рекомендовано геометричні параметри молотків (радіус заокруглення 2–3 мм) для забезпечення мінімальних енергетичних витрат при максимальній якості відокремлення.

4. Проведено порівняння розрахункових і експериментальних даних, яке підтвердило ефективність запропонованої моделі у прогнозуванні сили удару та меж руйнування воску.

Обмеження моделі. У моделі не враховується сила тертя між молотком і восковою поверхнею, що може призводити до недооцінки теплових втрат енергії. Передбачається локальна деформація воскової комірки без урахування поширення хвиль напружень у структурі стільника. Розглядається одиничний акт удару, тоді як у реальних умовах відбувається одночасний контакт кількох молотків, що створює накладання імпульсів. Коефіцієнт жорсткості контакту k та параметри пластичності p_k потребують уточнення під час зміни вологості або температури перги, оскільки ці фактори суттєво впливають на механічні властивості матеріалу [2, 6, 28].

Отримані результати можуть бути використані для подальшого розвитку та реалізації дисертаційного дослідження, що виконується в межах зазначеної науково-дослідної роботи за відповідним науковим керівництвом.

Список використаних джерел

1. Dranca F., Ursachi F., Oroian M. Bee bread: Physicochemical characterization and phenolic content extraction optimization. *Foods*, 2020, 9(10), 1358. <https://doi.org/10.3390/foods9101358>

2. Poyraz F., et al. Characterization of bee bread produced with defined starter cultures: Physicochemical, microbial and nutrition profiles. *Fermentation*, 2023, 9(2), 174. <https://doi.org/10.3390/fermentation9020174>

3. Ilie C.I., et al. Bee bread: A promising source of bioactive compounds and antimicrobial properties. *Antioxidants*, 2024, 13(3), 353. <https://doi.org/10.3390/antiox13030353>

4. Bakour M., Fernandes Â., Barros L., Soković M., Ferreira I.C.F.R., Badiia L. Bee bread as a functional product: chemical composition and bioactive properties. *LWT – Food Science and Technology*, 2019, 109, 276–282. <https://doi.org/10.1016/j.lwt.2019.02.008>

5. Margaoan R., et al. Bee collected pollen and bee bread: bioactive constituents and health benefits. *Antioxidants*, 2019, 8(12), 568. <https://doi.org/10.3390/antiox8120567>

6. Kharchenko S., et al. Modeling of bee-bread drying process. *Engineering for Rural Development*, 2020, 19, 445–449. <https://doi.org/10.22616/ERDev.2020.19.TF100>

7. Svečnjak L., et al. Standard methods for *Apis mellifera* beeswax research. *Journal of Apicultural Research*, 2019, 58(3), 345–358. <https://doi.org/10.1080/00218839.2019.1571556>

8. Morgan J., Davies H. Measurement of physical and mechanical properties of beeswax as a function of temperature. *Journal of Experimental Biology and Agricultural Sciences*, 2002, 40(5), 367–372. <https://doi.org/10.1179/026708302225001714>

9. Fratini F., Cilia G., Turchi B., Felicioli A. Beeswax: a minireview of its antimicrobial activity and application. *Asian Pacific Journal of Tropical Medicine*, 2016, 9(8), 839–843. <https://doi.org/10.1016/j.apjtm.2016.07.003>
10. Luo X., et al. Processing technologies for bee products: an overview of bee bread as functional product. *Frontiers in Nutrition*, 2021, 8, 727181. <https://doi.org/10.3389/fnut.2021.727181>
11. Lankarani H.M., Nikravesh P.E. Continuous contact force models for impact analysis in multibody systems. *Nonlinear Dynamics*, 1994, 5(2), 193–207. <https://doi.org/10.1007/BF00045676>
12. Skrinjar L., Slavič J., Boltežar M. A review of continuous contact-force models in multibody dynamics. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2018, 145, 171–187. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2018.07.010>
13. Zhang J., Li W., Zhao L., He G. A continuous contact force model for impact analysis in multibody dynamics. *Mechanism and Machine Theory*, 2020, 153, 103946. <https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2020.103946>
14. Khulief Y.A., Radkowski S. Modeling of impact in multibody systems: An overview. *ASME Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 2013, 8(2), 021012. <https://doi.org/10.1115/1.4006202>
15. Rangel R.V. Prediction of impact forces using Hertzian contact theory. *International Journal of Impact Engineering*, 1990, 4(4), 287–284. [https://doi.org/10.1016/0888-3270\(90\)90009-A](https://doi.org/10.1016/0888-3270(90)90009-A)
16. Chen W., et al. Study on modeling and validation of an improved contact force model based on Hertz theory in multibody impact dynamics. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 2025, 39(2), 1863–1874. <https://doi.org/10.1007/s12206-025-0804-2>
17. Perret-Liaudet J., Rigaud E. Response of an impacting Hertzian contact to an order-2 subharmonic excitation: Theory and experiments. *Journal of Sound and Vibration*, 2006, 296(1-2), 319-333. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2006.03.004>
18. Warzecha M. An investigation of compliant contact force models applied for analysis of simultaneous, multi-zone impacts of particles. *Computational Particle Mechanics*, 2024, 11(1), 1–27. <https://doi.org/10.1007/s40571-023-00606-w>
19. Cao D., Yang Y., Chen H., Wang D., Jiang G., Li C., Zhao K. A novel contact force model for the impact analysis of structures with coating and its experimental verification. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2016, 70, 1056–1072. <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2015.08.016>
20. Tian Q., Flores P. A comprehensive survey of analytical, numerical, and experimental methodologies for dynamics of multibody mechanical systems with clearance or imperfect joints. *Mechanism and Machine Theory*, 2018, 122, 1–57. <https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2017.12.002>
21. Can Z., Gidik B., Kara Y., Kolaylı S. Antioxidant activity and phenolic content of bee breads from different regions of Türkiye by chemometric analysis (PCA and HCA). *European Food Research and Technology*, 2024, 250, 2961–2971. <https://doi.org/10.1007/s00217-024-04597-7>
22. Aylanc V., Falcão S.I., Vilas-Boas M. Bee pollen and bee bread nutritional potential: Chemical composition and macronutrient digestibility under in vitro gastrointestinal system. *Food Chemistry*, 2023, 413, 135597. <https://doi.org/10.1016/j.foodchem.2023.135597>
23. Kolayli S., Okumus G.Y., Kara Y., Demir Kanbur E., Can Z., Ozkok A., Samanci A.E.T. Bee bread from Anatolia: its chemical composition, phenolic and aromatic profiles, and antioxidant properties. *Journal of Apicultural Research*, 2025, 64(3), 944–958. <https://doi.org/10.1080/00218839.2024.2352319>

23. Kharchenko S., Samborski S., Al Afif R., Kharchenko F., Kłonica M., Piven M. Development of a methodology for assessing mechanical damage in biological objects: Impact parameters and micro-damage analysis. *Materials*, 2025, 18(9), 2075. <https://doi.org/10.3390/ma18092075>
24. Mandal M.K., et al. High speed impact on granular media: Force scaling and acoustic pulses. *Soft Matter*, 2024, 20(3), 541–553. <https://doi.org/10.1039/d3sm01410j>
25. Carlos D.M., Almeida F., Carneiro J.R., Lopes M.d.L. Influence of mechanical damage under repeated loading on the resistance of geogrids against abrasion. *Materials*, 2021, 14(13), 3544. <https://doi.org/10.3390/ma14133544>
26. Goldman D.I., Umbanhowar P.B. Scaling and dynamics of sphere and disk impact into granular media. *Physical Review E*, 2008, 77(2), 021308. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.77.021308>
27. Krizou N., Clark A.H. Power-law scaling of early-stage forces during granular impact. *Physical Review Letters*, 2020, 124(17), 178002. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.124.178002>
28. Molenda J., Horabik M. Mechanical properties of granular materials and their impact on load distribution in silos: A review. *Scientia Agriculturae Bohemica*, 2015, 46(1), 1–9. <https://doi.org/10.1515/sab-2015-0001>
29. Ding S., Hu Y., Jian B., Zhang Y., Xia R., Hu G. A review and comparative analysis of normal contact force models for viscoelastic particles. *International Journal of Impact Engineering*, 2024, 189, 104968. <https://doi.org/10.1016/j.ijimpeng.2024.104968>
31. Flores P., Machado M., Silva M.T., Martins J.M. On the continuous contact force models for soft materials in multibody dynamics. *Multibody System Dynamics*, 2011, 25(3), 357–375. <https://doi.org/10.1007/s11044-010-9237-4>
32. Wang Q., Tian Q., Hu H. Dynamic simulation of frictional multi-zone contacts of thin beams. *Nonlinear Dynamics*, 2015, 83(4), 1783–1798. <https://doi.org/10.1007/s11071-015-2456-8>
33. Abd-Elhady M.S., Rindt C.C.M., van Steenhoven A.A. Force propagation speed in a bed of particles due to an incident particle impact. *Advanced Powder Technology*, 2010, 21(2), 150–164. <https://doi.org/10.1016/j.apt.2009.11.009>
34. Сиромятников Ю. М., Сиромятніков П. С., Харченко О. М., Белих О. В. Огляд сучасних підходів до вдосконалення технологій витоПЛення бджолиного воску: технічні рішення та інженерні перспективи. Технічний сервіс агропромислового, лісового та транспортного комплексів, 2025, № 26, с. 45–88. <https://doi.org/10.64165/journal-ts.2025.26.45-88>
35. Сиромятников Ю. М., Шабля В. П., Харченко О. М., Белих О. В. Біологічний контроль вароозу за допомогою мікробних препаратів: інноваційні підходи в екологічному бджільництві. Свинарство і агропромислове виробництво, 2024, № 4(82), с. 80–93. [https://doi.org/10.37143/2786-7730-2024-4\(82\)6](https://doi.org/10.37143/2786-7730-2024-4(82)6)
36. Шабля В. П., Сиромятников Ю. М. Відновлення напрямку бджільництва в Харківському національному технічному університеті сільського господарства ім. Петра Василенка. Вісник Харківського національного технічного університету сільського господарства, 2021, № 211 («Інноваційне, технічне та технологічне забезпечення галузі тваринництва»), с. 106–108.

References

1. Dranca, F., Ursachi, F., & Oroian, M. (2020). Bee bread: Physicochemical characterization and phenolic content extraction optimization. *Foods*, 9(10), 1358. <https://doi.org/10.3390/foods9101358>

2. Poyraz, F., et al. (2023). Characterization of bee bread produced with defined starter cultures: Physicochemical, microbial and nutrition profiles. *Fermentation*, 9(2), 174. <https://doi.org/10.3390/fermentation9020174>
3. Ilie, C. I., et al. (2024). Bee bread: A promising source of bioactive compounds and antimicrobial properties. *Antioxidants*, 13(3), 353. <https://doi.org/10.3390/antiox13030353>
4. Bakour, M., Fernandes, Â., Barros, L., Soković, M., Ferreira, I. C. F. R., & Badiia, L. (2019). Bee bread as a functional product: Chemical composition and bioactive properties. *LWT – Food Science and Technology*, 109, 276–282. <https://doi.org/10.1016/j.lwt.2019.02.008>
5. Margaoan, R., et al. (2019). Bee collected pollen and bee bread: Bioactive constituents and health benefits. *Antioxidants*, 8(12), 568. <https://doi.org/10.3390/antiox8120567>
6. Kharchenko, S., et al. (2020). Modeling of bee-bread drying process. *Engineering for Rural Development*, 19, 445–449. <https://doi.org/10.22616/ERDev.2020.19.TF100>
7. Svečnjak, L., et al. (2019). Standard methods for *Apis mellifera* beeswax research. *Journal of Apicultural Research*, 58(3), 345–358. <https://doi.org/10.1080/00218839.2019.1571556>
8. Morgan, J., & Davies, H. (2002). Measurement of physical and mechanical properties of beeswax as a function of temperature. *Journal of Experimental Biology and Agricultural Sciences*, 40(5), 367–372. <https://doi.org/10.1179/026708302225001714>
9. Fratini, F., Cilia, G., Turchi, B., & Felicioli, A. (2016). Beeswax: A minireview of its antimicrobial activity and application. *Asian Pacific Journal of Tropical Medicine*, 9(8), 839–843. <https://doi.org/10.1016/j.apjtm.2016.07.003>
10. Luo, X., et al. (2021). Processing technologies for bee products: An overview of bee bread as functional product. *Frontiers in Nutrition*, 8, 727181. <https://doi.org/10.3389/fnut.2021.727181>
11. Lankarani, H. M., & Nikravesh, P. E. (1994). Continuous contact force models for impact analysis in multibody systems. *Nonlinear Dynamics*, 5(2), 193–207. <https://doi.org/10.1007/BF00045676>
12. Skrinjar, L., Slavič, J., & Boltežar, M. (2018). A review of continuous contact-force models in multibody dynamics. *International Journal of Mechanical Sciences*, 145, 171–187. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2018.07.010>
13. Zhang, J., Li, W., Zhao, L., & He, G. (2020). A continuous contact force model for impact analysis in multibody dynamics. *Mechanism and Machine Theory*, 153, 103946. <https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2020.103946>
14. Khulief, Y. A., & Radkowski, S. (2013). Modeling of impact in multibody systems: An overview. *ASME Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 8(2), 021012. <https://doi.org/10.1115/1.4006202>
15. Rangel, R. V. (1990). Prediction of impact forces using Hertzian contact theory. *International Journal of Impact Engineering*, 4(4), 287–284. [https://doi.org/10.1016/0888-3270\(90\)90009-A](https://doi.org/10.1016/0888-3270(90)90009-A)
16. Chen, W., et al. (2025). Study on modeling and validation of an improved contact force model based on Hertz theory in multibody impact dynamics. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 39(2), 1863–1874. <https://doi.org/10.1007/s12206-025-0804-2>
17. Perret-Liaudet, J., & Rigaud, E. (2006). Response of an impacting Hertzian contact to an order-2 subharmonic excitation: Theory and experiments. *Journal of Sound and Vibration*, 296(1-2), 319–333. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2006.03.004>
18. Warzecha, M. (2024). An investigation of compliant contact force models applied for analysis of simultaneous, multi-zone impacts of particles. *Computational Particle Mechanics*, 11(1), 1–27. <https://doi.org/10.1007/s40571-023-00606-w>

19. Cao, D., Yang, Y., Chen, H., Wang, D., Jiang, G., Li, C., & Zhao, K. (2016). A novel contact force model for the impact analysis of structures with coating and its experimental verification. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 70, 1056–1072. <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2015.08.016>
20. Tian, Q., & Flores, P. (2018). A comprehensive survey of analytical, numerical, and experimental methodologies for dynamics of multibody mechanical systems with clearance or imperfect joints. *Mechanism and Machine Theory*, 122, 1–57. <https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2017.12.002>
21. Can, Z., Gıdık, B., Kara, Y., & Kolaylı, S. (2024). Antioxidant activity and phenolic content of bee breads from different regions of Türkiye by chemometric analysis (PCA and HCA). *European Food Research and Technology*, 250, 2961–2971. <https://doi.org/10.1007/s00217-024-04597-7>
22. Aylanc, V., Falcão, S. I., & Vilas-Boas, M. (2023). Bee pollen and bee bread nutritional potential: Chemical composition and macronutrient digestibility under in vitro gastrointestinal system. *Food Chemistry*, 413, 135597. <https://doi.org/10.1016/j.foodchem.2023.135597>
23. Kolayli, S., Okumus, G. Y., Kara, Y., Demir Kanbur, E., Can, Z., Ozkok, A., & Samanci, A. E. T. (2025). Bee bread from Anatolia: its chemical composition, phenolic and aromatic profiles, and antioxidant properties. *Journal of Apicultural Research*, 64(3), 944–958. <https://doi.org/10.1080/00218839.2024.2352319>
24. Kharchenko, S., Samborski, S., Al Afif, R., Kharchenko, F., Kłonica, M., & Piven, M. (2025). Development of a methodology for assessing mechanical damage in biological objects: Impact parameters and micro-damage analysis. *Materials*, 18(9), 2075. <https://doi.org/10.3390/ma18092075>
25. Mandal, M. K., et al. (2024). High speed impact on granular media: Force scaling and acoustic pulses. *Soft Matter*, 20(3), 541–553. <https://doi.org/10.1039/d3sm01410j>
26. Carlos, D. M., Almeida, F., Carneiro, J. R., & Lopes, M. d. L. (2021). Influence of mechanical damage under repeated loading on the resistance of geogrids against abrasion. *Materials*, 14(13), 3544. <https://doi.org/10.3390/ma14133544>
27. Goldman, D. I., & Umbanhowar, P. B. (2008). Scaling and dynamics of sphere and disk impact into granular media. *Physical Review E*, 77(2), 021308. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.77.021308>
28. Krizou, N., & Clark, A. H. (2020). Power-law scaling of early-stage forces during granular impact. *Physical Review Letters*, 124(17), 178002. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.124.178002>
29. Molenda, J., & Horabik, M. (2015). Mechanical properties of granular materials and their impact on load distribution in silos: A review. *Scientia Agriculturae Bohemica*, 46(1), 1–9. <https://doi.org/10.1515/sab-2015-0001>
30. Ding, S., Hu, Y., Jian, B., Zhang, Y., Xia, R., & Hu, G. (2024). A review and comparative analysis of normal contact force models for viscoelastic particles. *International Journal of Impact Engineering*, 189, 104968. <https://doi.org/10.1016/j.ijimpeng.2024.104968>
31. Flores, P., Machado, M., Silva, M. T., & Martins, J. M. (2011). On the continuous contact force models for soft materials in multibody dynamics. *Multibody System Dynamics*, 25(3), 357–375. <https://doi.org/10.1007/s11044-010-9237-4>
32. Wang, Q., Tian, Q., & Hu, H. (2015). Dynamic simulation of frictional multi-zone contacts of thin beams. *Nonlinear Dynamics*, 83(4), 1783–1798. <https://doi.org/10.1007/s11071-015-2456-8>
33. Abd-Elhady, M. S., Rindt, C. C. M., & van Steenhoven, A. A. (2010). Force propagation speed in a bed of particles due to an incident particle impact. *Advanced Powder Technology*, 21(2), 150–164. <https://doi.org/10.1016/j.appt.2009.11.009>

34. Syromiatnykov, Yu. M., Syromiatnikov, P. S., Kharchenko, O. M., & Bielykh, O. V. (2025). Review of modern approaches to improving beeswax rendering technologies: Technical solutions and engineering perspectives. *Technical Service of Agro-Industrial, Forestry and Transport Complex*, 26, 45–88. <https://doi.org/10.64165/journal-ts.2025.26.45-88>
35. Syromiatnykov, Yu. M., Shablia, V. P., Kharchenko, O. M., & Bielykh, O. V. (2024). Biological control of varroosis using microbial preparations: Innovative approaches in ecological beekeeping. *Pig Breeding and Agro-Industrial Production*, 4(82), 80–93. [https://doi.org/10.37143/2786-7730-2024-4\(82\)6](https://doi.org/10.37143/2786-7730-2024-4(82)6)
36. Shablia, V. P., & Syromiatnykov, Yu. M. (2021). Restoration of the beekeeping specialization at Petro Vasylenko Kharkiv National Technical University of Agriculture. *Bulletin of Kharkiv National Technical University of Agriculture*, 211, 106–108.