Козаченко О. В.
ORCID 0000-0003-1326-4307
E-mail: o.v.kozachenko21@gmail.com
Дьяконов С. О.
ORCID 0000-0002-2451-5610
Пахучий А. М.
ORCID 0000-0002-7371-5264
Волковський О. М.
ORCID 0009-0006-5516-0601
Державний біотехнологічний університет, м. Харків, Україна

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІКИ ДИСКОВОГО ҐРУНТООБРОБНОГО АГРЕГАТУ З АДАПТИВНИМИ ПАРАМЕТРАМИ ЖОРСТКОСТІ

DOI https://doi.org/10.31359/2311.441X.2026.28.68

УДК 631.316

Козаченко О. В., Дьяконов С. О., Пахучий А. М., Волковський О. М. ***Математичне моделювання динаміки дискового ґрунтообробного агрегату з адаптивними параметрами жорсткості***

Анотація. *У статті представлено результати дослідження динамічної стійкості ґрунтообробного агрегату типу дискатор. Метою роботи є розробка та верифікація математичної моделі, що описує функціонування системи «трактор–дискатор» як просторової механічної структури для підвищення якості технологічного процесу поверхневого обробітку ґрунту. У ході дослідження, на основі положень класичної механіки, було сформовано систему диференціальних рівнянь Лагранжа другого роду. Особливу увагу приділено взаємодії робочих органів на пружних стояках із регулятором жорсткості та опорно-прикочувального котка з неоднорідним ґрунтовим середовищем. Модель враховує випадковий характер збурень, спричинених мікрорельєфом поля, які провокують вібрації рами та зміну тягового опору ґрунтообробного агрегату. Для перевірки теоретичних положень проведено чисельне моделювання в середовищі SOLIDWORKS Simulation. Встановлено, що за використання пружного кріплення з регулятором жорсткості кутові відхилення робочих органів ґрунтообробного знаряддя в експлуатаційних режимах є мінімальними (φ = 2,34°, ψ = 0,85°). Доведено, що незначна деформація пружних стояків забезпечує стабільність глибини проникнення дисків та високу рівномірність обробітку по всій ширині захвату. Практична значущість результатів дослідження полягає в підтвердженні ефективності запропонованої конструктивної схеми, що дозволяє мінімізувати резонансні явища, знизити енергетичні витрати та покращити агротехнічні показники стану поверхні поля. Отримані дані можуть бути використані при проектуванні нових типів енергоефективних ґрунтообробних машин.*

Ключові слова: *дискатор, математична модель, рівняння Лагранжа, динамічна стійкість, пружна стійка, чисельне моделювання, якість обробітку ґрунту.*

Kozachenko O.V., Dyakonov S.O., Pakhuchy A.M., Volkovsky O.M. ***Mathematical modeling of the dynamics of a disk tillage unit with adaptive stiffness parameters***

Abstract. *The article presents the results of a study of the dynamic stability of a soil tillage unit of the disc harrow type. The aim of the work is to develop and verify a mathematical model that describes the functioning of the "tractor-disc harrow" system as a spatial mechanical structure to improve the quality of the technological process of surface tillage. In the course of the study, based on the provisions of classical mechanics, a system of Lagrange*

differential equations of the second kind was formed. Special attention is paid to the interaction of working bodies on elastic struts with a stiffness regulator and a support and compaction roller with a heterogeneous soil environment. The model takes into account the random nature of disturbances caused by the microrelief of the field, which provoke frame vibrations and changes in the traction resistance of the tillage unit. To verify the theoretical provisions, numerical modeling was carried out in the SOLIDWORKS Simulation environment. It was established that when using an elastic mount with a stiffness regulator, the angular deviations of the working bodies of the tillage tool in operational modes are minimal ($\varphi = 2.34°$, $\psi = 0.85°$). It is proved that a slight deformation of the elastic struts ensures the stability of the depth of penetration of the disks and high uniformity of cultivation across the entire width of the grip. The practical significance of the research results lies in confirming the effectiveness of the proposed design scheme, which allows minimizing resonance phenomena, reducing energy consumption and improving the agrotechnical indicators of the field surface. The obtained data can be used in the design of new types of energy-efficient tillage machines.

Keywords: *diskator, mathematical model, Lagrange equation, dynamic stability, elastic strut, numerical modeling, quality of tillage.*

Постановка проблеми

Сучасні системи обробітку грунту передбачають широке використання грунтообробних агрегатів з дисковими робочими органами. При їх застосуванні передбачається одержання верхнього посівного шару дрібнокомковатої структури, у відповідності до встановлених агротехнічних вимог, яка є найбільш бажаною для розвитку кореневої системи рослин. Проблемними аспектами при роботі дискаторів залишається здатність зберігати стабільну глибину та траєкторію руху дискових робочих органів на пружному кріпленні під час вібрацій та ударних навантажень на швидкості, зазвичай, 12-15 км/год. Важливим аспектом при створенні ефективних засобів поверхневого обробітку грунту з дисковими робочими органами також є спрямування на енергозбереження для заданих умов роботи, що напряму залежить від технічного рівня машин та забезпечення їх динамічної стійкості. Тому подальше вивчення процесу функціонування системи «трактор-дискатор» як просторової механічної структури може вважатися важливим науково-прикладним завданням.

Аналіз останніх досліджень та публікацій

Дослідження стійкості грунтообробних знарядь з дисковими робочими органами, які входять до складу машинно-тракторного агрегату, є визначальним резервом підвищення ефективності поверхневого обробітку грунту щодо відповідності встановленим агротехнічним нормам, спрямування на енергозбереження, підвищення показників надійності сільськогосподарської техніки. Розв'язанню цієї актуальної проблеми присвячені роботи багатьох науковців із оригінальними методичними підходами до вирішення проблеми для різних типів машин за функціональним призначенням [1, 2, 3]. Розглядаючи процес взаємодії сошникової групи сівалки, в [1] авторами теоретично обгрунтовано раціональні конструктивні і технологічні параметри, що дозволяють мінімізувати коливний рух сошника при виконанні технологічного процесу сівби та підвищити рівномірність зароблення насіння у сформовану борозенку. Встановлено, що одним з ключових завдань залишають питання дослідження динаміки руху машинно-тракторних агрегатів з урахуванням впливу профілю опорної поверхні, авторами роботи [4] реалізовано теоретичні розрахунки для просторового руху агрегату. Такі наукові підходи до вирішення поставленої проблеми дозволяють більш досконало вирішувати питання раціонального формування складу агрегатів щодо характеристик

енергетичного засобу та конкретної сільськогосподарської машини для забезпечення ефективного виконання технологічного процесу обробітку грунту.

Особливу увагу сучасні дослідники [5, 6] приділяють грунтообробним знаряддям на основі дискових робочих органів, зокрема, дискаторів з кріпленням сферичних дисків на пружних стояках. Для забезпечення функціональної стабільності, коли виконання технологічного процесу поверхневого обробітку дисковими робочими органами пов'язано із змінними характеристиками грунту по довжині гону, вирішуються конструктивні питання жорсткості підвіски із врахуванням рядності та режимів роботи. Авторами побудовано математичну модель взаємодії робочого органу з грунтом для випадку відмінності за показниками жорсткості пружних стояків в рядах знаряддя, що визначається діючим навантаженням при виконанні технологічного процесу. Математичнеому моделюванню експлуатаційної стійкості механічних систем сівалок присвячена робота [7]. Використовуючи методичні підходи Ляпунова щодо визначення ступені асимптотичної стійкості системи авторами отримано теоретичні вирази для розрахунку конструктивних параметрів при проектуванні машин. Як результат в [8] виконана оптимізація конструктивних параметрів дискового знаряддя для зниження тягового опору та підвищення довговічності робочих органів при забезпечення якісних показників виконання технологічного процесу обробітку. В [9] автором досліджено стійкість механічної системи та обгрунтовані раціональні параметри дискатора із адаптацію змінних характеристик грунтового середовища із спрямуванням зменшення витрат енергії на виконання роботи. Науковий інтерес складають дослідження [10, 11], що передбачають вивчення процесів взаємодії робочих органів з грунтовим середовищем застосуванням сучасних прикладних програм. Авторами проведена симуляція процесу взаємодії робочих органів ґрунтообробних машин із ґрунтом в Simcenter STAR-CCM+.

Формулювання мети досліджень. Метою роботи є побудова математичних моделей, що описують стійкість функціонування механічної системи ґрунтообробного агрегату типу дискатора.

Результати досліджень

Під час математичного моделювання функціональної стійкості дискового агрегату для поверхневого обробітку ґрунту за вихідні умови прийнято його рівномірний прямолінійний рух по горизонтальній поверхні поля. Використання стандартного начіпного пристрою трактора обумовлює можливість вертикальних коливань знаряддя, яке в моделі представлено як система твердих тіл із відповідними ступенями вільності. Це враховано як вагомий чинник впливу на загальну динаміку руху агрегату [1]. На рис. 1 представлено 3D-модель знаряддя з основними виконавчими елементами: дисковими робочими органами на пружних стояках та прутковим котком, що закріплені на рамі.Взаємне розташування центрів мас робочих органів та точок прикладання рівнодійних сил опору ґрунту (рис. 2) дає повне уявлення про динамічну взаємодію між компонентами конструкції та середовищем. Такий підхід дозволяє коректно врахувати зовнішні навантаження на функціональну стійкість системи при розв'язанні поставленої задачі

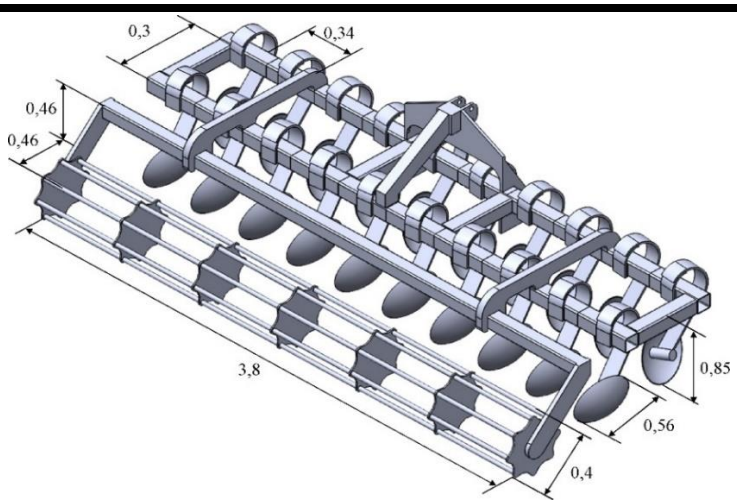

Рис.1. 3D-модель розробленого грунтообробного знаряддя

Просторове положення та рух робочих органів дискатора досліджуються у нерухомій декартовій системі координат XYZ. Вісь O_X збігається з напрямком руху агрегату, вісь O_Y розташована у горизонтальній площині перпендикулярно до напрямку руху, а вісь O_Z орієнтована вертикально вгору. Для спрощення аналізу динаміки запропоновано використання допоміжної рухомої системи координат (x'y'z'), початок якої суміщено з центром мас окремого дискового робочого органу або секції знаряддя. Такий підхід забезпечує жорстку прив'язку до об'єкта дослідження, дозволяючи розглядати його складний рух як поєднання поступального переміщення разом із центром мас та обертання навколо власних осей.Відносне положення рухомої системи координат щодо нерухомої визначається трьома лінійними координатами (x, y, z). Це дає змогу фіксувати положення робочого органу в просторі та враховувати його відхилення від номінальної траєкторії під дією зовнішніх чинників: неоднорідності опору ґрунтового середовища, мікрорельєфу поверхні поля та інших динамічних збурень

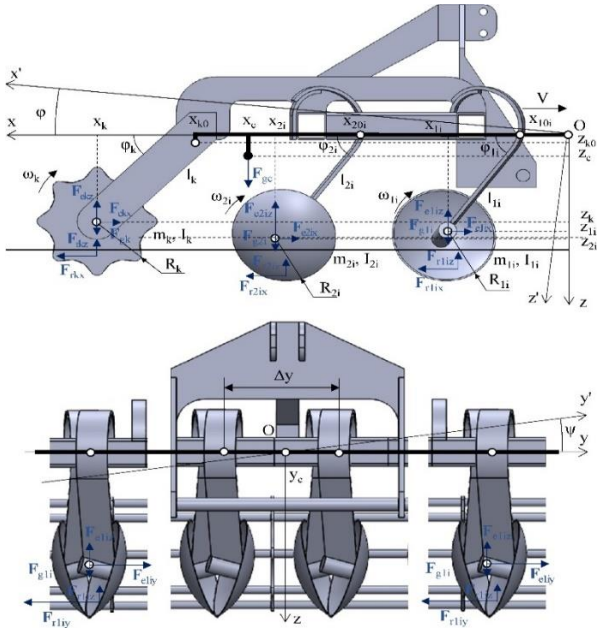

Рис. 2. Еквівалентна модель розробленого дискового знаряддя

При складанні диференційних рівнянь, що описують динаміку взаємодії сферичних дисків грунтообробного знаряддя з грунтом необхідною умовою слід вважати урахування усіх діючих сил у просторі, а саме: сили тяжіння, реакції грунтового

середовища, сил інерції, сил обертального та коливального характеру складових елементів дискатора. При цьому приймаємо, що енергетичний засіб, що входить до складу грунтообробного агрегату, при виконанні технологічного процесу поверхневого обробітку грунту виконує прямолінійний рух з постійною швидкістю по горизонтальні поверхні, коли $V_x = V = const$, $V_z = 0$, $V_y = 0$, а прискорення відсутнє. Таким чином, сформульовані припущення щодо характеру руху грунтообробного агрегату з дисковими робочими органами на пружних стояках, розглянута механічна система буде мати $2+4N$ ступенів вільності, що також співвідноситься з такоюж самою кількістю узагальнених координат, до яких відносяться такі: кути відхилення першого і другого рядів пружних стояків в площині xOz $\varphi_{11},\ldots,\varphi_{1N}$, $\varphi_{21},\ldots,\varphi_{2N}$ і в площині yOz $\psi_{11},\ldots,\psi_{1N}$, $\psi_{21},\ldots,\psi_{2N}$, а також кути повороту опорної рами дискатора φ і ψ навколо поздовжньої і поперечної осей з'єднання дискатора з енергетичним засобом агрегату.

На основі визначених умов функціонування та прийнятих припущень щодо динамічної стійкості агрегату, рівняння руху досліджуваної системи в узагальнених координатах представлені у формі рівнянь Лагранжа другого роду. Вибір цього методу зумовлений наявністю великої кількості геометричних зв'язків у конструкції дискатора. Застосування формалізму Лагранжа дозволяє виключити з розгляду реакції ідеальних зв'язків, що суттєво спрощує математичний опис просторової моделі та подальші чисельні розрахунки. Рівняння руху системи мають такий вигляд:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right)-\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}=Q, & \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}}\right)-\frac{\partial L}{\partial \psi}=Q, \\ \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_{11}}\right)-\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_{11}}=Q, & \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}_{11}}\right)-\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}_{11}}=Q, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_{1N_1}}\right)-\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_{1N}}=Q, & \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}_{1N_1}}\right)-\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}_{1N}}=Q, \\ \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_{21}}\right)-\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_{21}}=Q, & \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}_{21}}\right)-\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}_{21}}=Q, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_{2N_2}}\right)-\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_{2N}}=Q, & \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}_{2N_2}}\right)-\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}_{2N}}=Q, \end{cases} \quad (1)$$

де L – функція Лагранжа, Дж;

$$L = T - U, \quad (2)$$

де T – кінетична енергія системи твердих тіл, Дж; U – потенціальна енергія твердих тіл, Дж; Q – узагальнена нефункціональна сила або момент сили, Н·м; φ, ψ – узагальнені координати (куту повороту), рад; $\dot{\varphi}, \dot{\psi}$ – похідні узагальнених координат за часом рад/с; t – час, с.

Для розрахунку кінетичної енергії дискових робочих робочих органів грунтообробного знаряддя використовуємо формулу:

$$T = T_c + T_1 + T_2 + T_k, \tag{3}$$

де T_c – кінетична енергія, що відповідає поступальному руху центра мас рами грунтообробного знаряддя, Дж:

$$T_c = \frac{1}{2} M_c \left(\dot{x}_c'^2 + \dot{y}_c'^2 + \dot{z}_c'^2 \right), \tag{4}$$

M_c – маса рами знаряддя, кг; $\dot{x}_c'^2$, $\dot{y}_c'^2$, $\dot{z}_c'^2$ – складові швидкості центра мас рами у напрямках осей x′, y′ і z′ у системі координат x′y′z′, м/с; T_1, T_2 – кінетична енергія дискових робочих органів дискатора першого і другого рядів дискатора, відповідно, Дж:

$$T_1 = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{1}{2} m_{1i} \left(\dot{x}_{1i}'^2 + \dot{y}_{1i}'^2 + \dot{z}_{1i}'^2 \right) + \frac{1}{2} I_{1i} \omega_{1i}^2 \right), \tag{5}$$

$$T_2 = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{1}{2} m_{2i} \left(\dot{x}_{2i}'^2 + \dot{y}_{2i}'^2 + \dot{z}_{2i}'^2 \right) + \frac{1}{2} I_{2i} \omega_{2i}^2 \right), \tag{6}$$

де m_{1i}, m_{2i} – маса і-го сферичного диска 1-го та 2-го ряду знаряддя, відповідно, кг; $\left(\dot{x}_{1i}', \dot{y}_{1i}', \dot{z}_{1i}'\right), \left(\dot{x}_{2i}', \dot{y}_{2i}', \dot{z}_{2i}'\right)$ – проєкції швидкості поступального руху *i*-го диска 1-го і 2-го рядів на осі координатної системи, м/с; I_{1i}, I_{2i} – моменти інерції *i*-го диска 1-го і 2-го рядів відносно осі обертання, кг·м²; ω_{1i}, ω_{2i} – кутові швидкості і-го диска 1-го і 2-го рядів, рад/с; i – номер сферичного диска у певному ряду; N – кількість сферичних дисків у 1-му ряду; T_k – кінетична енергія пруткового котка, Дж:

$$T_k = \frac{1}{2} m_k \left(\dot{x}_k'^2 + \dot{y}_k'^2 + \dot{z}_k'^2 \right) + \frac{1}{2} I_k \omega_k^2, \tag{7}$$

де m_k – маса пруткового котка, кг; $\left(\dot{x}_k', \dot{y}_k', \dot{z}_k'\right)$ – відповідно, швидкість поступального руху котка в напрямках осей, м/с; I_k – момент інерції котка відносно осі обертання, кг·м^2; ω_k – кутова швидкість пруткового котка знаряддя, рад/с.

Здійснюючи загально прийняті способи переходу від координатної системи x′y′z′ до глобальної системи xyz, одержимо такі наступні вирази (8-19):

$$x_c' = x_c \cos\varphi - z_c \sin\varphi - Vt, \tag{8}$$

$$y_c' = y_c \cos\psi - \left(x_c \sin\varphi + z_c \cos\varphi \right) \sin\psi, \tag{9}$$

$$z_c' = y_c \sin\psi + \left(x_c \sin\varphi + z_c \cos\varphi \right) \cos\psi, \tag{10}$$

$$x_{1i}' = \left(l_{1i} \cos\varphi_{1i} \cos\psi_{1i} + x_{10i} \right) \cos\varphi - l_{1i} \sin\varphi_{1i} \cos\psi_{1i} \sin\varphi - Vt, \tag{11}$$

$$\begin{gathered} y_{1i}' = \left(l_{1i} \cos\psi_{1i} + \left(|i-5| + 0{,}5 \right) \Delta y_{10} \right) \cos\psi - \\ - \left(\left(l_{1i} \cos\varphi_{1i} \cos\psi_{1i} + x_{10} \right) \sin\varphi + l_{1i} \sin\varphi_{1i} \cos\psi_{1i} \cos\varphi \right) \sin\psi, \end{gathered} \tag{12}$$

$$z'_{1i} = \left(l_{1i}\cos\psi_{1i} + \left(|i-5|+0,5\right)\Delta y_{10}\right)\sin\psi + \\ +\left(\left(l_{1i}\cos\varphi_{1i}\cos\psi_{1i} + x_{10}\right)\sin\varphi + l_{1i}\sin\varphi_{1i}\cos\psi_{1i}\cos\varphi\right)\cos\psi, \quad (13)$$

$$x'_{2i} = \left(l_{2i}\cos\varphi_{2i}\cos\psi_{2i} + x_{20i}\right)\cos\varphi - l_{2i}\sin\varphi_{2i}\cos\psi_{2i}\sin\varphi - Vt, \quad (14)$$

$$y'_{2i} = \left(l_{2i}\cos\psi_{2i} + \left(|i-5|+0,5\right)\Delta y_{20}\right)\cos\psi - \\ -\left(\left(l_{2i}\cos\varphi_{2i}\cos\psi_{2i} + x_{20}\right)\sin\varphi + l_{2i}\sin\varphi_{2i}\cos\psi_{2i}\cos\varphi\right)\sin\psi, \quad (15)$$

$$z'_{2i} = \left(l_{2i}\cos\psi_{2i} + \left(|i-5|+0,5\right)\Delta y\right)\sin\psi + \\ +\left(\left(l_{2i}\cos\varphi_{2i}\cos\psi_{2i} + x_{20}\right)\sin\varphi + l_{2i}\sin\varphi_{2i}\cos\psi_{2i}\cos\varphi\right)\cos\psi, \quad (16)$$

$$x'_k = \left(l_k\cos\varphi_k\cos\psi_k + x_{k0}\right)\cos\varphi - l_k\sin\varphi_k\cos\psi_k\sin\varphi - Vt, \quad (17)$$

$$y'_k = l_k\cos\psi_k\cos\psi - \left(\left(l_k\cos\varphi_k\cos\psi_k + x_{k0}\right)\sin\varphi + l_k\sin\varphi_k\cos\psi_k\cos\varphi\right)\sin\psi, \quad (18)$$

$$z'_k = l_k\cos\psi_k\sin\psi + \left(\left(l_k\cos\varphi_k\cos\psi_k + x_{k0}\right)\sin\varphi + l_k\sin\varphi_k\cos\psi_k\cos\varphi\right)\cos\psi, \quad (19)$$

де x, y, z – координати в нерухомій системі, м; x', y', z' – координати в рухомій системі, м; V – лінійна швидкість руху дискового грунтообробного агрегату, м/с; l – відстань між точкою кріплення пружного стояка і центром мас робочого органу знаряддя, м.

Шляхом проведення диференціювання одержаних рівнянь (1)–(19) за часом, одержано відповідні аналітичні залежності для швидкостей руху досліджуваного грунтообробного знаряддя з дисковими робочими органами на пружних стояках:

$$\dot{x}'_c = -x_c\dot{\varphi}\sin\varphi - z_c\dot{\varphi}\cos\varphi - V, \quad (20)$$

$$\dot{y}'_c = -y_c\dot{\psi}\sin\psi - \left(x_c\dot{\varphi}\cos\varphi + z_c\dot{\varphi}\sin\varphi\right)\sin\psi - \left(x_c\sin\varphi + z_c\cos\varphi\right)\dot{\psi}\cos\psi, \quad (21)$$

$$z'_c = y_c\dot{\psi}\cos\psi + \left(x_c\dot{\varphi}\cos\varphi - z_c\dot{\varphi}\sin\varphi\right)\cos\psi - \left(x_c\sin\varphi + z_c\cos\varphi\right)\dot{\psi}\sin\psi, \quad (22)$$

$$x'_{1i} = \left(-l_{1i}\dot{\varphi}_{1i}\sin\varphi_{1i}\cos\psi_{1i} - l_{1i}\cos\varphi_{1i}\dot{\psi}_{1i}\sin\psi_{1i}\right)\cos\varphi - \\ -\left(l_{1i}\cos\varphi_{1i}\cos\psi_{1i} + x_{10i}\right)\dot{\varphi}\sin\varphi - \\ -l_{1i}\sin\varphi_{1i}\cos\psi_{1i}\sin\varphi\left(\frac{\dot{\varphi}_{1i}\cos\varphi_{1i}}{\sin\varphi_{1i}} - \frac{\dot{\psi}_{1i}\sin\psi_{1i}}{\cos\psi_{1i}} + \frac{\dot{\varphi}\cos\varphi}{\sin\varphi}\right) - V, \quad (23$$

$$\dot{y}'_{1i} = -l_{1i}\dot{\psi}_{1i}\sin\psi_{1i}\cos\psi - \left(l_{1i}\cos\psi_{1i} + \left(|i-5|+0,5\right)\Delta y_{10}\right)\dot{\psi}\sin\psi\cos\psi -$$
$$-\left(l_{1i}\cos\varphi_{1i}\cos\psi_{1i} + x_{10}\right)\sin\varphi\sin\psi\left(\frac{-l_{1i}\dot{\varphi}_{1i}\sin\varphi_{1i}\cos\psi_{1i} - l_{1i}\cos\varphi_{1i}\dot{\psi}_{1i}\sin\psi_{1i}}{l_{1i}\cos\varphi_{1i}\cos\psi_{1i} + x_{10}} + \right. \quad (24$$
$$\left. + \frac{\dot{\varphi}\cos\varphi}{\sin\varphi} + \frac{\dot{\psi}\sin\psi}{\sin\psi}\right) - l_{1i}\sin\varphi_{1i}\cos\psi_{1i}\cos\varphi\sin\psi \times \quad)$$
$$\times\left(\frac{\dot{\varphi}_{1i}\cos\varphi_{1i}}{\sin\varphi_{1i}} - \frac{\dot{\psi}_{1i}\sin\psi_{1i}}{\cos\psi_{1i}} - \frac{\dot{\varphi}\sin\varphi}{\cos\varphi} + \frac{\dot{\psi}\cos\psi}{\sin\psi}\right),$$

$$z'_{1i} = -l_{1i}\dot{\psi}_{1i}\sin\psi_{1i}\sin\psi + \left(l_{1i}\cos\psi_{1i} + \left(|i-5|+0,5\right)\Delta y_{10}\right)\dot{\psi}\cos\psi +$$
$$+\left(l_{1i}\cos\varphi_{1i}\cos\psi_{1i} + x_{10}\right)\sin\varphi\cos\psi\left(-\frac{l_{1i}\dot{\varphi}_{1i}\sin\varphi_{1i}\cos\psi_{1i} + l_{1i}\cos\varphi_{1i}\dot{\psi}_{1i}\sin\psi_{1i}}{l_{1i}\cos\varphi_{1i}\cos\psi_{1i} + x_{10}} + \right.$$
$$\left. + \frac{\dot{\varphi}\cos\varphi}{\sin\varphi} - \frac{\dot{\psi}\sin\psi}{\cos\psi}\right) + l_{1i}\sin\varphi_{1i}\cos\psi_{1i}\cos\varphi\cos\psi \times \quad (25$$
$$\times\left(\frac{\dot{\varphi}_{1i}\cos\varphi_{1i}}{\sin\varphi_{1i}} - \frac{\dot{\psi}_{1i}\sin\psi_{1i}}{\cos\psi_{1i}} - \frac{\dot{\varphi}\sin\varphi}{\cos\varphi} - \frac{\dot{\psi}\sin\psi}{\cos\psi}\right),$$

$$x'_{2i} = \left(-l_{2i}\dot{\varphi}_{2i}\sin\varphi_{2i}\cos\psi_{2i} - l_{2i}\cos\varphi_{2i}\dot{\psi}_{2i}\sin\psi_{2i}\right)\cos\varphi -$$
$$-\left(l_{2i}\cos\varphi_{2i}\cos\psi_{2i} + x_{20i}\right)\dot{\varphi}\sin\varphi - \quad (26)$$
$$-l_{2i}\sin\varphi_{2i}\cos\psi_{2i}\sin\varphi\left(\frac{\dot{\varphi}_{2i}\cos\varphi_{2i}}{\sin\varphi_{2i}} - \frac{\dot{\psi}_{2i}\sin\psi_{2i}}{\cos\psi_{2i}} + \frac{\dot{\varphi}\cos\varphi}{\sin\varphi}\right) - V,$$

$$\dot{y}'_{2i} = -l_{2i}\dot{\psi}_{2i}\sin\psi_{2i}\cos\psi - \left(l_{2i}\cos\psi_{2i} + \left(|i-5|+0,5\right)\Delta y_{20}\right)\dot{\psi}\sin\psi\cos\psi -$$
$$-\left(l_{2i}\cos\varphi_{2i}\cos\psi_{2i} + x_{20}\right)\sin\varphi\sin\psi\left(\frac{-l_{2i}\dot{\varphi}_{2i}\sin\varphi_{2i}\cos\psi_{2i} - l_{2i}\cos\varphi_{2i}\dot{\psi}_{2i}\sin\psi_{2i}}{l_{2i}\cos\varphi_{2i}\cos\psi_{2i} + x_{20}} + \right. \quad (27$$
$$\left. + \frac{\dot{\varphi}\cos\varphi}{\sin\varphi} + \frac{\dot{\psi}\sin\psi}{\sin\psi}\right) - l_{2i}\sin\varphi_{2i}\cos\psi_{2i}\cos\varphi\sin\psi \times \quad)$$
$$\times\left(\frac{\dot{\varphi}_{2i}\cos\varphi_{2i}}{\sin\varphi_{2i}} - \frac{\dot{\psi}_{2i}\sin\psi_{2i}}{\cos\psi_{2i}} - \frac{\dot{\varphi}\sin\varphi}{\cos\varphi} + \frac{\dot{\psi}\cos\psi}{\sin\psi}\right),$$

$$z'_{2i} = -l_{2i}\dot{\psi}_{2i}\sin\psi_{2i}\sin\psi + \left(l_{2i}\cos\psi_{2i} + \left(|i-5|+0,5\right)\Delta y_{10}\right)\dot{\psi}\cos\psi +$$
$$+\left(l_{2i}\cos\varphi_{2i}\cos\psi_{2i} + x_{20}\right)\sin\varphi\cos\psi\left(-\frac{l_{2i}\dot{\varphi}_{2i}\sin\varphi_{2i}\cos\psi_{2i} + l_{2i}\cos\varphi_{2i}\dot{\psi}_{2i}\sin\psi_{2i}}{l_{2i}\cos\varphi_{2i}\cos\psi_{2i} + x_{20}} + \right.$$
$$\left. + \frac{\dot{\varphi}\cos\varphi}{\sin\varphi} - \frac{\dot{\psi}\sin\psi}{\cos\psi}\right) + l_{2i}\sin\varphi_{2i}\cos\psi_{2i}\cos\varphi\cos\psi\times \quad (28$$
$$\times\left(\frac{\dot{\varphi}_{2i}\cos\varphi_{2i}}{\sin\varphi_{2i}} - \frac{\dot{\psi}_{2i}\sin\psi_{2i}}{\cos\psi_{2i}} - \frac{\dot{\varphi}\sin\varphi}{\cos\varphi} - \frac{\dot{\psi}\sin\psi}{\cos\psi}\right),$$

$$x'_k = \left(-l_k\dot{\varphi}_k\sin\varphi_k\cos\psi_k - l_k\cos\varphi_k\dot{\psi}_k\sin\psi_k\right)\cos\varphi -$$
$$-\left(l_k\cos\varphi_k\cos\psi_k + x_{k0}\right)\dot{\varphi}\sin\varphi -$$
$$-l_k\sin\varphi_k\cos\psi_k\sin\varphi\left(\frac{\dot{\varphi}_k\cos\varphi_k}{\sin\varphi_k} - \frac{\dot{\psi}_k\sin\psi_k}{\cos\psi_k} + \frac{\dot{\varphi}\cos\varphi}{\sin\varphi}\right) - V, \quad (29)$$

$$\dot{y}'_k = -l_k\dot{\psi}_k\sin\psi_k\cos\psi - l_k\cos\psi_k\dot{\psi}\sin\psi\cos\psi - \left(l_k\cos\varphi_k\cos\psi_k + x_{k0}\right)\sin\varphi\sin\psi\times$$
$$\times\left(\frac{-l_k\dot{\varphi}_k\sin\varphi_k\cos\psi_k - l_k\cos\varphi_k\dot{\psi}_k\sin\psi_k}{l_k\cos\varphi_k\cos\psi_k + x_{20}} + \frac{\dot{\varphi}\cos\varphi}{\sin\varphi} + \frac{\dot{\psi}\sin\psi}{\sin\psi}\right) - \quad (30)$$
$$-l_k\sin\varphi_k\cos\psi_k\cos\varphi\sin\psi\times\left(\frac{\dot{\varphi}_k\cos\varphi_k}{\sin\varphi_k} - \frac{\dot{\psi}_{2i}\sin\psi_k}{\cos\psi_k} - \frac{\dot{\varphi}\sin\varphi}{\cos\varphi} + \frac{\dot{\psi}\cos\psi}{\sin\psi}\right),$$

$$z'_k = -l_k\dot{\psi}_k\sin\psi_k\sin\psi + l_k\cos\psi_k\dot{\psi}\cos\psi + \left(l_k\cos\varphi_k\cos\psi_k + x_{k0}\right)\times$$
$$\times\sin\varphi\cos\psi\left(-\frac{l_k\dot{\varphi}_k\sin\varphi_k\cos\psi_k + l_k\cos\varphi_k\dot{\psi}_k\sin\psi_k}{l_k\cos\varphi_k\cos\psi_k + x_{k0}} + \frac{\dot{\varphi}\cos\varphi}{\sin\varphi} - \frac{\dot{\psi}\sin\psi}{\cos\psi}\right) + \quad (31)$$
$$+l_k\sin\varphi_k\cos\psi_k\cos\varphi\cos\psi\left(\frac{\dot{\varphi}_k\cos\varphi_k}{\sin\varphi_k} - \frac{\dot{\psi}_k\sin\psi_k}{\cos\psi_k} - \frac{\dot{\varphi}\sin\varphi}{\cos\varphi} - \frac{\dot{\psi}\sin\psi}{\cos\psi}\right),$$

Для проведення кількісного аналізу динаміки механічної системи визначено моменти інерції основної рами та робочих органів дискатора. Розрахунок параметрів інерції конструктивних елементів із пружним кріпленням та регулятором жорсткості базується на фундаментальних положеннях класичної механіки. Виходячи із загального визначення моменту інерції твердого тіла відносно осей координат, отримано такі залежності:

$$\mathrm{I_i} = \int\limits_{(m)} r^2 dm = \rho_{cm}\int\limits_{(V)} r^2 dV = \rho_{cm}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\arcsin\frac{d}{2R}}\int\limits_{R-\delta}^{R} r^4\sin\theta dr d\theta d\phi =$$
$$= \frac{2\pi}{5}\rho_{cm}\left(R_i^5 - \left(R_i - \delta_i\right)^5\right)\left(1 - \sqrt{1 - \frac{d_i^2}{4R_i^2}}\right), \quad (32)$$

де $r,\ \theta,\ \varphi$ – змінні координати у сферичній системі відліку; ρ_{cm} – густина матеріалу робочого органу, для сталі приймаємо $\rho_{cm} = 7900\ кг/м^3$; R_i – радіус сфери диска, м; δ_i – товщина сферичного диска, м; d_i – діаметр сферичного диска, м.

Розрахунок загальної маси сферичного диска знаряддя доцільно розрахувати за таким відомим співвідношення:

$$m_{\text{i}} = \rho_{cm} \int\limits_{(V)} dV = \rho_{cm} \int\limits_{0}^{2\pi} \int\limits_{0}^{\arcsin\frac{d}{2R}} \int\limits_{R-\delta}^{R} r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi = \\ = \frac{2\pi}{3} \rho_{cm} \left(R_i^3 - \left(R_i - \delta_i \right)^3 \right) \left(1 - \sqrt{1 - \frac{d_i^2}{4R_i^2}} \right). \tag{33}$$

Момент інерції пруткового котка грунтообробного знаряддя можна розрахувати за аналогією розрахунку момента інерції тонкостінного циліндра за формулою:

$$\text{I}_{\text{k}} = \frac{\pi L_k}{2} \rho_{cm} \left(R_k^4 - \left(R_k - \delta_k \right)^4 \right), \tag{34}$$

де R_{k} – зовнішній радіус котка, м; δ_{k} – товщина стінки циліндра, м; L_{k} – довжина котка, м.

Використовуючи прийнятий підхід щодо розрахунків характеристик обраної механічної системи, масау пруткового котка в першому наближенні можна визначити за формулою маси циліндричної оболонки за формулою:

$$m_{\text{k}} = \pi L_k \rho_{cm} \left(R_k^2 - \left(R_k - \delta_k \right)^2 \right). \tag{35}$$

При визначенні потенційної енергії механічної системи у вигляді твердих тіл, які являють собою конструкцію дискового грунтообробного знаряддя використаного принцип суперпозиції. Запишимо наступним чином:

$$U = U_c + U_1 + U_2 + U_k. \tag{36}$$

де U_c – потенціальна енергія, що відповідає центру мас основної рами знаряддя, Дж:

$$U_c = F_{gc} z_c', \tag{37}$$

F_{gc} – вага рами знаряддя, Н:

$$F_{gc} = M_c g, \tag{38}$$

U_1 – потенціальна енергія дискових робочих органів 1-го ряду, Дж:

$$U_1 = \sum_{i=1}^{N_1} F_{g1i} z_{1i}' + \sum_{i=1}^{N_1} F_{k1i} z_{1i}', \tag{39}$$

U_2 – потенціальна енергія дискових робочих органів 2-го ряду, Дж:

$$U_2 = \sum_{i=1}^{N_1} F_{g2i} z_{2i}' + \sum_{i=1}^{N_1} F_{k2i} z_{2i}', \tag{40}$$

F_{g1i}, F_{g2i} – сила тяжіння окремого сферичного диска 1-го і 2-го рядів, Н:

$$F_{g1i} = F_{g2i} = F_{gi} = m_i g \tag{41}$$

U_k – потенціальна енергія пруткового котка знаряддя, Дж:

$$U_k = F_{gk} z'_{2i}, \tag{42}$$

F_{gk} – сила тяжіння пруткового котка дискатора, Н:

$$F_{gk} = m_k g. \tag{43}$$

При виконанні розрахунків узагальнену непотенційну силу, що діє на механічну систему твердих тіл грунтообробного знаряддя, можна застосувати у вигляді:

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_k, \tag{44}$$

де Q_1, Q_2 – момент сили, що відповідає 1-му і 2-му рядів дискових робочих органів, Н·м:

$$Q_1 = \sum_{i=1}^{N_1} \left(F_{r1ix} x'_{1i} + F_{r1iy} y'_{1i} + F_{r1iz} z'_{1i} \right), \tag{45}$$

$$Q_2 = \sum_{i=1}^{N_1} \left(F_{r2ix} x'_{2i} + F_{r2iy} y'_{2i} + F_{r2iz} z'_{2i} \right), \tag{46}$$

$F_{r1ix}, F_{r1iy}, F_{r1iz}, F_{r2ix}, F_{r2iy}, F_{r2iz}$ – відповідно, сили опору грунтового середовища, які прикладено до сферичних дисків у 1-му і 2-му рядах уздовж координатних осей Ox, Oy і Oz, Н;

Q_k – момент сили, що виникає в результаті взаємодії пруткового котка з ґрунтом, Н·м:

$$Q_k = F_{rkx} x'_k + F_{rkz} z'_k, \tag{47}$$

F_{rkx} – горизонтальна складова сили опору пруткового котка з боку ґрунту, Н:

$$F_{rkx} = \left(f_k + \frac{\eta_k}{R_k} \right) F_{rkz}, \tag{48}$$

f_k, η_k – відповідно, коефіцієнти тертя ковзання та кочення пруткового котка знаряддя;

F_{rkz} – вертикальна сила взаємодії котка з грунтовим середовищем, Н:

$$F_{rkz} = 0,86\iota \sqrt{\frac{\left(m_k g\right)^4}{q_0 L \left(2R_k\right)^2}}, \tag{49}$$

де ι – коефіцієнт, який визначає додатковий опір, від деформації ґрунту конструктивними елементами поверхні котка (шорсткість матеріалу, виступи на поверхні тощо, Н/м; q_0 – параметр, об'ємної деформації ґрунту, Н/м³.

Сформований математичний апарат у вигляді системи рівнянь (20)–(49) дає змогу комплексно оцінити коливання ґрунтообробного знаряддя у двох проекціях. Проте з огляду на високу трудомісткість аналітичного розв'язання такої системи, для реалізації

мети дослідження було застосовано програмний комплекс SOLIDWORKS Simulation. Використання методів чисельного моделювання дозволило детально проаналізувати вплив конструктивних параметрів дискових робочих органів на пружних стояках на стійкість та ефективність функціонування всієї механічної системи. Такий підхід забезпечує можливість визначення раціональних варіантів компонування агрегату, спрямованих на демпфування вібрацій, підвищення рівномірності глибини обробітку та зниження загальної енергоємності процесу в системах поверхневого обробітку ґрунту. Згідно з програмою досліджень, на першому етапі було розроблено скінченно-елементну сіткову модель знаряддя, встановлено умови фіксації та визначено граничні зусилля. Результати візуалізації розрахункової схеми наведено на рисунку 3.

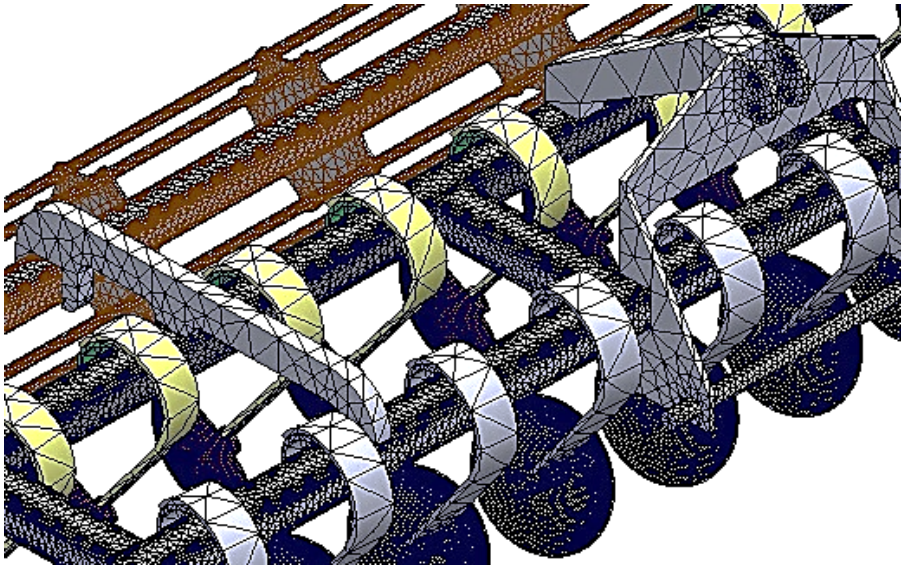

Рис. 3. Сіткова модель дискового знаряддя у середовищі SOLIDWORKS Simulation

Задля отримання результатів симуляції у вигляді зміни положення дискового грунтообробного знаряддя у просторі було прийнято попередньо визначені наступні конструктивні параметри: R_1 = 107 мм, R_2 = 52 мм, L = 421 мм, ψ = 125°, b = 109 мм, δ = 14 мм, α = 9,7°, γ = 15°, β = 48,8°, θ = 5,2°. Результати проведеної симуляції представлено на рисунку 4. Як показали результати проведених розрахунків, максимальнв значення кутів коливання грунтообробного знаряддя з дисковими робочими органами та регуляторо жорсткості у двох площинах складають, відповідно: φ = 2,34° і ψ = 0,85°.

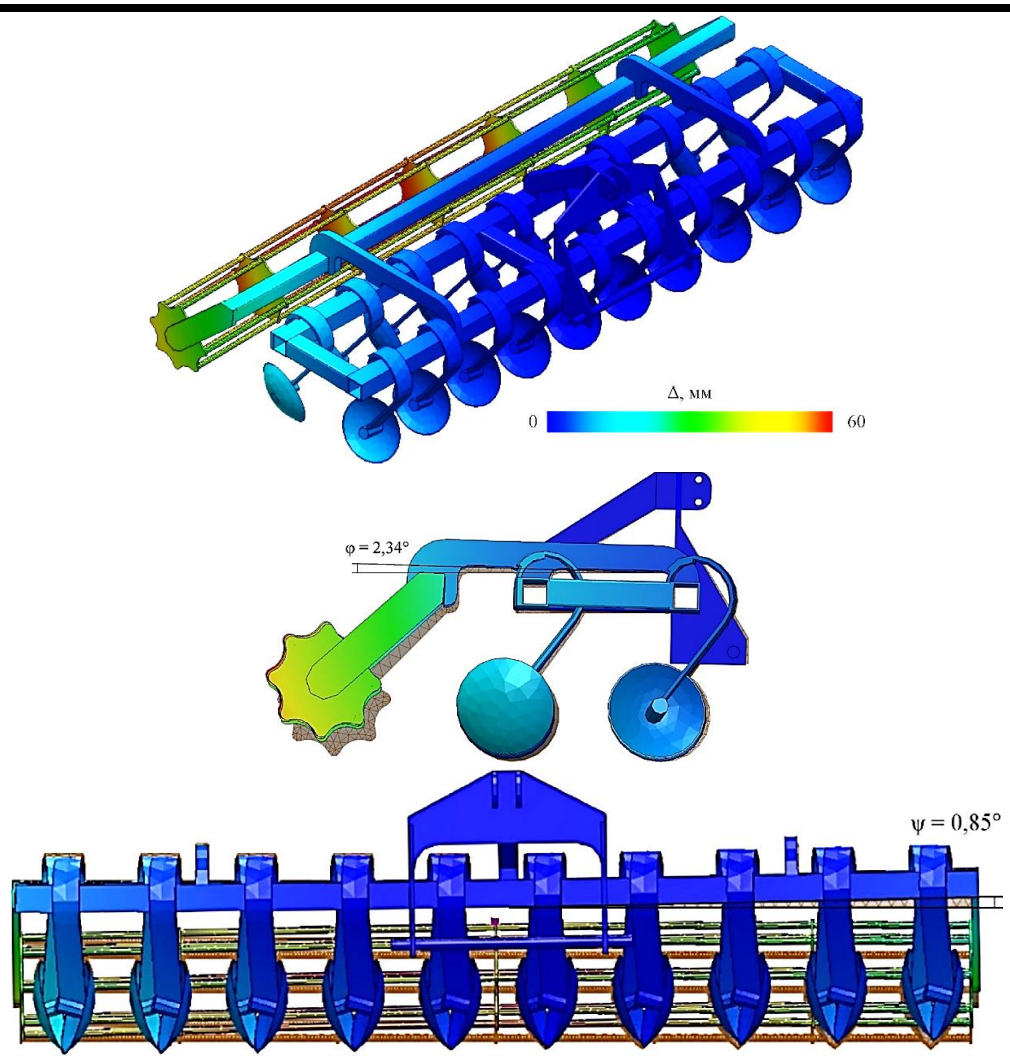

Рис. 4. Результати симуляції зміни положення дискового грунтообробного знаряддя

Чисельне моделювання підтвердило динамічну стійкість грунтообробного знаряддя з дисковими робочими органами, оскільки амплітуда коливань робочих органів залишається в межах допустимих значень, забезпечуючи стабільну глибину обробітку та входження сферичного диска в грунт. Відсутність резонансних явищ та відповідність виконаним теоретичним розрахункам підтверджують ефективність та працездатність обраної конструктивної схеми запропонованого дискатора на пружних стояках та регулятором жорсткості.

Висновки

1. Виконано комплексне дослідження динамічної стійкості дискатора з пружною підвіскою робочих органів. Розроблено просторову математичну модель на основі рівнянь Лагранжа другого роду, яку верифіковано шляхом чисельного моделювання в середовищі SOLIDWORKS Simulation. Такий інтегрований підхід дозволив з високою точністю описати перехідні процеси в механічній системі «агрегат — ґрунтове середовище».

2. Математична модель адекватно відтворює динаміку функціонування дискатора, враховуючи просторові масо-інерційні характеристики конструкції, фізико-механічну взаємодію дисків і котка з ґрунтом, а також демпфувальні властивості пружних стояків. Це дає змогу прогнозувати поведінку агрегату під впливом випадкових збурень мікрорельєфу.

3. Встановлено, що за умови використання регуляторів жорсткості амплітуда коливань дискатора в робочих режимах не перевищує гранично допустимих значень (φ = 2,34°, ψ = 0,85°). Це підтверджує високу динамічну стійкість конструкції, забезпечує стабільність курсового нахилу дисків та рівномірність глибини обробітку. Оптимізація жорсткості кріплення дозволяє мінімізувати вібраційне навантаження на раму та знизити енергоємність технологічного процесу шляхом стабілізації тягового опору.

Список використаних джерел

1. Адамчук В. В., Булгаков В. М., Головач І. В., Горобей В. П. Теоретичні основи коливання зубчастого сошника селекційної сівалки. *Механізація та електрифікація сільського господарства: між від. темат. наук. зб.* 2015. Вип. 1 (100). С. 10–21.

2. В. Ф. Пащенко, В. В. Ким Методика построения математических моделей устойчивости функционирования механических систем. Харьков: ХНАУ им. В. В Докучаева, 2010. 115 с.

3. Козаченко О.В. Проблеми ресурсозбереження у сільськогосподарських агрегатах: наукове видання. Харків: Торнадо, 2008. – 272с.

4. Антощенков Р. В., Галич І. В., Череватенко Г. І. Динаміка та енергетика руху машинно-тракторного агрегату з урахуванням профілю опорної поверхні: монографія. – Харків: ДБТУ, 2024. – 100 с.

5. Козаченко О.В. Динамічна модель процесу деформації пружної стійки дискатора / О.В. Козаченко, К.В. Сєдих // Техніка та енергетика. Київ: НУБіП, № 11(3), 2020. С. 31-39.

6. Козаченко О.В. Фізико-математична модель взаємодії диска з грунтом / О.В. Козаченко, К.В. Сєдих, О.М. Волковський // Інженерія природокористування. Харків: ХНТУСГ, №2(16), 2020. С. 69-77.

7. Kharchenko S., Domachenko V., Siedykh K. Mathematical modeling of Mogilnay O., Paschenko operational stability of sowing machines' mechanical systems. Eastern-European Journal of Enterprise technologies. – 2018. № 4/1 (94).P.37- 47.

8. Kozachenko O., Siedykh K. Modeling of the process of deformation of the elastic rack of the working bodies of the tillage implement TEKA. An International Quarterly Journal on Motorization, Vehicle Operation, Energy Efficiency and Mechanical Engineering. Lublin-Rzeszow. 2020. Vol. 20. No1. 41-50.

9. Сєдих К. В. (2021). Обґрунтування конструктивно-технологічних параметрів дискатора з пружними стійками. Дис… канд. техн. наук за спеціальністю 05.05.11. Харківський національний технічний університет сільського господарства імені Петра Василенка. 248 с.

10. Кобець А.С., Алієв Е.Б., Теслюк Г.В., Алієва О.Ю. Симуляція процесу взаємодії робочих органів ґрунтообробних машин із ґрунтом в Simcenter STAR-CCM+. Науковий журнал Техніка та енергетика НУБіП Том 14, № 1. 2023. DOI: 10.31548/machinery/1.2023.09.

11. Алієв Е.Б., Теслюк Г.В., Бєлка О.В., Пацула О.М. Чисельне моделювання процесу роботи грунтообробного модуля для передпосівного обробітку грунту. Науково-технічний бюлетень Інституту олійних культур НААН, 2023, № 34: ст. 132-145 DOI: 10.36710/IOC-2023-34-12.

References

1. Adamchuk V. V., Bulgakov V. M., Golovach I. V., Gorobey V. P. Theoretical foundations of oscillation of the toothed coulter of a selective seeder. Mechanization and electrification of agriculture: inter-subject. scientific collection. 2015. Issue 1 (100). P. 10–21.

2. V. F. Pashchenko, V. V. Kim Methodology for building mathematical models of the stability of the functioning of mechanical systems. Kharkiv: KhNAU named after V. V. Dokuchaev, 2010. 115 p.

3. Kozachenko O. V. Problems of resource conservation in agricultural aggregates: scientific publication. Kharkiv: Tornado, 2008. – 272 p.

4. Antoshchenkov R. V., Galich I. V., Cherevatenko G. I. Dynamics and energetics of the movement of a machine-tractor unit taking into account the profile of the supporting surface: monograph. – Kharkiv: DBTU, 2024. – 100 p.

5. Kozachenko O. V. Dynamic model of the process of deformation of the elastic support of the diskator / O. V. Kozachenko, K. V. Sedykh // Technology and energy. Kyiv: NUBiP, No. 11(3), 2020. P. 31-39.

6. Kozachenko O. V. Physical and mathematical model of the interaction of the disk with the soil / O. V. Kozachenko, K. V. Sedykh, O. M. Volkovsky // Environmental engineering. Kharkiv: KhNTUSG, No. 2(16), 2020. P. 69-77.

7. Kharchenko S., Domachenko V., Siedykh K. Mathematical modeling of Mogilnay O., Paschenko operational stability of sowing machines' mechanical systems. Eastern-European Journal of Enterprise technologies. – 2018. № 4/1 (94).P.37- 47.

8. Kozachenko O., Siedykh K. Modeling of the process of deformation of the elastic rack of the working bodies of the tillage implement TEKA. An International Quarterly Journal on Motorization, Vehicle Operation, Energy Efficiency and Mechanical Engineering. Lublin-Rzeszow. 2020. Vol. 20. No1. 41-50.

9. Sedykh K. V. (2021). Justification of the design and technological parameters of a disc harrow with elastic racks. Dissertation candidate of technical sciences in the specialty 05.05.11. Petro Vasylenko Kharkiv National Technical University of Agriculture. 248 p.

10. Kobets A.S., Aliyev E.B., Teslyuk G.V., Aliyeva O.Yu. Simulation of the process of interaction of working bodies of soil tillage machines with the soil in Simcenter STAR-CCM+. Scientific journal Technology and Energy NUBiP Vol. 14, No. 1. 2023. DOI: 10.31548/machinery/1.2023.09.

11. Aliyev E.B., Teslyuk G.V., Belka O.V., Patsula O.M. Numerical modeling of the soil tillage module operation process for pre-sowing soil cultivation. Scientific and Technical Bulletin of the Institute of Oilseeds of the NAAS, 2023, No. 34: pp. 132-145 DOI: 10.36710/IOC-2023-34-12.

Отримано: 07.04.2026. Прийнято: 15.04.2026. Опубліковано: 15.05.2026.