Сіняєва О. В.
ORCID 0000-0001-5954-2355
E-mail: masay020488@gmail.com
Пак А. О.
ORCID 0000-0003-3140-3657
E-mail: pak.andr1980@gmail.com
Крекот М. М.
ORCID 0000-0003-3449-3336
E-mail: krekotshm@gmail.com
Сичова Т. О.
ORCID 0000-0001-9604-7847
E-mail: sychova@btu.kharkiv.ua
Торяник Д. О.
ORCID 0000-0002-0414-8569
E-mail: datory@gmail.com
Бакум М. В.
ORCID 0000-0003-1049-0464
E-mail: bakymshm@btu.kharkov.ua
Козій О. Б.
ORCID 0000-0001-5504-4244
E-mail: koziyabshm@btu.kharkov.ua
Державний біотехнологічний університет, м. Харків, Україна

ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ РУХУ ЧАСТОЧКИ В ПОВІТРЯНОМУ ПОТОЦІ МІЖ ВІБРУЮЧИМИ ПЛОЩИНАМИ

DOI https://doi.org/10.31359/2311.441X.2026.28.191

УДК 631.362

Сіняєва О.В., Пак А.О., Крекот М.М., Сичова Т.О., Торяник Д.О., Бакум М.В., Козій О.Б. ***Фізико-математичне моделювання руху часточки в повітряному потоці між вібруючими площинами***

Анотація. *Розглянуто питання математичного моделювання руху часточки в повітряному потоці між вібруючими робочими площинами. Розроблено спрощену модель руху часточки в повітряному потоці між вібруючими робочими площинами. Виконано аналіз похибки в отриманих результатах математичного моделювання за первинною і спрощеною моделями руху часточки.*

Ключові слова *вібропневматичний сепаратор, математичне моделювання, спрощена модель.*

Siniaieva O., Pak A., Krekot M., Sychova T., Toryanyk D., Bakum M., Kozii O. ***Physical-mathematical modeling of particle motion in air flow between vibrating planes***

Abstract. *Separation of grain materials in the air stream between vibrating working planes is a more rational method that provides an increase in the separation time without increasing the size of the separator and energy losses in the separation process, which is pneumatic separation between two vibrating planes. The effectiveness of this separation method and its result depend on the optimal values of the parameters of the separation process, for example, such as the air flow speed, the frequency and amplitude of oscillations of the working surfaces, as well as the distance between them. The justification of the listed parameters can be performed by mathematical modeling of the separation process. But the model of particle motion in the air stream between vibrating working planes is difficult to use in production conditions. Therefore, the aim of the work was to simplify the theoretical model of the symmetric motion of a particle in the air stream under the action of vibration of the working planes, in*

order to quickly determine the parameters of the separation process of grain materials without significant loss of calculation accuracy. The results of calculations based on a simplified model of particle motion in the air flow between vibrating working planes make it possible to effectively separate the components of grain material and predict its results with minimal loss of accuracy.

Key words: *vibropneumatic separator, mathematical modeling, simplified model*

Постановка проблеми у загальному вигляді

Одним із основних способів очищення та сортування зернових матеріалів являється пневмосепарація. Цей спосіб набув широкого використання за рахунок своєї простоти і високої продуктивності. Одночасно з цим пневматичні сепаратори високоефективно розділяють компоненти насіннєвих сумішей з різними коефіцієнтами вітрильності. При використані пневматичних сепараторів у якості машини для попереднього очищення зернових матеріалів в основному використовуються конструкції з вертикальними сепарувальними каналами, задачею яких являється виокремити з матеріалу компоненти з високою вітрильністю. При цьому часу за який компоненти зернового матеріалу проявляють свої аеродинамічні властивості цілком достатньо. Інша ситуація складається з пневматичними сепараторами, задачею яких являється сортування компонентів зернових сумішей або додаткова сепарація зернових матеріалів з метою виокремлення у смітні фракції важковідокремлюваних компонентів. У такому випадку компонентам зернового матеріалу необхідно значно більше часу щоб проявити свої аеродинамічні властивості. Тому спеціальні пневмосепаратори мають обмежену продуктивність і ефективність роботи, що може бути вирішене за рахунок збільшення довжини робочої частини сепарувального каналу. В реальному секторі промисловості такі пневмосепаратори не використовуються, оскільки мають значні габарити і низьку енергоефективність. Більш раціональним способом, який забезпечує підвищення часу сепарації без збільшення розмірів сепаратора і втрат енергії на процес сепарації, являється пневмосепарація між двома коливальними площинами, запропонований в патенті [1] і реалізований в лабораторних установках. В такому способі компоненти зернових сумішей рухаються не тільки під дією повітряного потоку і сили тяжіння, а і під дією коливань робочих площин, що значно підвищує час перебування компонента зернового матеріалу в зоні сепарації. Ефективність такого способу сепарації і його результат залежать від оптимальних значень параметрів процесу сепарації, наприклад таких, як швидкість повітряного потоку, частота і амплітуда коливань робочих поверхонь, а також відстань між ними. Обґрунтування перелічених параметрів можна виконати шляхом математичного моделювання процесу сепарації, що дає можливість ефективно виконати розділення компонентів зернового матеріалу і прогнозувати його результати.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Теоретичними дослідженнями руху часточки в повітряному потоці займалися багато вчених серед яких П.М. Василенко [3]. Дослідження взаємодії тіл при ударі досліджував В.Ю. Плявнієкс в роботі [4], а А.Е. Кобринський і А.А. Кобринський виконували дослідження періодичного руху часточки під дією вібруючих робочих органів [5]. В роботі виконані теоретичні дослідження які ґрунтувались на результатах праць цих вчених.

Мета статті. Мета роботи полягає у спрощенні теоретичної моделі симетричного руху часточки в повітряному потоці під дією вібрації робочих площин для можливості швидкого визначення параметрів процесу сепарації зернових матеріалів без суттєвої втрати точності розрахунків.

Методи. В роботі застосовувались теоретичні методи дослідження, засновані на результатах, отриманих в роботах П.М. Василенка, В.Ю. Плявнієкса, А.Е. Кобринського й А.А. Кобринського.

Виклад основного матеріалу дослідження

Виконаємо теоретичні дослідження спираючись на попередні результати досліджень і припущення зроблені в роботі [5]. В зазначеній роботі були отримані рівняння удару кулі по поверхні площини в просторі, а також диференційні рівняння що описують рух частки під дією повітрягого потоку на протязі часу її переміщення між вертикальними робочими площинами сепаратора. Так маємо рівняння швидкості кулі після її взаємодії з робочою площиною:

$$v_x = u_x - \frac{\mu\left(u_x + \varpi_z r\right)}{1+\mu}, \tag{1}$$

$$v_y = -R u_y, \tag{2}$$

$$v_z = u_z - \frac{\mu\left(u_z - \varpi_x r\right)}{1+\mu}, \tag{3}$$

та кутову швидкість руху кулі після її взаємодії з робочою площиною:

$$\Omega_x = \varpi_x + \frac{u_z - \varpi_x r}{r\left(1+\mu\right)}, \tag{4}$$

$$\Omega_y = \varpi_y, \tag{5}$$

$$\Omega_z = \varpi_z - \frac{u_x + \varpi_z r}{r\left(1+\mu\right)}, \tag{6}$$

де $\vec{u} = \left(u_x, u_y, u_z\right)$ – швидкість точки удару кулі до її взаємодії з робочою площиною;

$\vec{v} = \left(v_x, v_y, v_z\right), \vec{V} = \left(V_x, V_y, V_z\right)$ – швидкість центра мас кулі після її взаємодії з робочою площиною;

$\vec{\varpi} = \left(\varpi_x, \varpi_y, \varpi_z\right)$ – кутова швидкість руху кулі до її взаємодії з робочою площиною;

$\vec{\Omega} = \left(\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z\right)$ – кутова швидкість руху кулі після її взаємодії з робочою площиною;

r – р адіус кулі; ρ – радіус інерції кулі;

$\mu = \left(\rho / r\right)^2$, що у нашому випадку знаходиться в межах $0 < \mu < 2/3$

Момент переходу від швидкості руху центра маси кулі до швидкості руху точки дотику кулі з робочою площиною описується залежностями:

- до взаємодії кулі з робочою площиною

$$U_x = u_x + \varpi_z r, \quad U_y = u_y, \quad U_z = u_z - \varpi_x r, \tag{7}$$

- після взаємодії кулі з робочою площиною

$$V_x = v_x + \Omega_z r, \quad V_y = v_y, \quad V_z = v_z - \Omega_x r. \tag{8}$$

де $\vec{U} = \left(U_x, U_y, U_z\right)$ швидкість руху точки дотику кулі з робочою площиною.

Диференційні рівняння руху центра мас кулі представляються в такому вигляді:

$$\ddot{x} = -k\left(\dot{x} - V_{\text{п}}\right)\sqrt{\left(\dot{x} - V_{\text{п}}\right)^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\,, \tag{9}$$

$$\ddot{y} = A\omega^2 \sin\left(\omega t + \varphi_1\right) - g\sin\alpha - k\dot{y}\sqrt{\left(\dot{x} - V_{\text{п}}\right)^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\,, \tag{10}$$

$$\ddot{z} = g\cos\alpha - k\dot{z}\sqrt{\left(\dot{x} - V_{\text{п}}\right)^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\,, \tag{11}$$

де k – коефіцієнт опору середовища;

g – прискорення вільгого падіння;

$V_{\text{п}}$ – середня швидкість повітряного потоку між робочими площинами;

A – амплітуда коливань робочих площин;

ω – частота коливань робочих площин;

α – кут відхилення робочих площин від вертикальної площини;

φ_1 – фаза взаємодії часточки з робочою площиною.

Рівняння записані для відносної системи координат. Ця система не змінює свого положення відносно робочої площини. Орієнтація системи координат організована таким чином що напрям осі x співпадає з напрямом проектованого повітряного потоку між робочими площинами, ось y спрямована перпендикулярно до робочих площин, а ось z у напрямку дії сили тяжіння що співпадає з перпендикуляром до приймачів часток. Початок координатних осей знаходиться в точці взаємодії робочої площини з поверхнею часточки. Було зроблено припущення, що тертя часточки і середовища, за умови обертального руху часточки, суттєво не впливає на закономірність зміни кутової швидкості часточки, тому може не враховуватись при теоретичних дослідженнях. При цьому в теоретичній моделі зміна кутової швидкості часточки буде змінювати своє значення тільки у момент взаємодії часточки з робочою поверхнею.

В роботі розглядається сталий режим руху часточки, при якому часточка рухається між робочими площинами по однотипним траєкторіям, з періодичністю рівною частоті коливань робочих площин. При цьому слід звернути увагу на те що час переміщення часточки від однієї робочої площини до іншої, наближений до половини періоду. Тобто час переміщення часточки між робочими площинами дуже малий, що тільки підтверджує доцільність зробленого вище припущення. Тоді рівняння (6) можна спростити до такого:

$$\ddot{y} = A\omega^2 \sin\left(\omega t + \varphi_1\right) - g\sin\alpha\,. \tag{12}$$

Таке спрощення дає можливість легко інтегрувати рівняння (8):

$$\dot{y} = -gt\sin\alpha - A\omega\cos\left(\omega t + \varphi_1\right) + C_1\,; \tag{13}$$

$$y = C_1 t - A\sin\left(\omega t + \varphi_1\right) - \tfrac{1}{2}gt^2\sin\alpha + C_2\,. \tag{14}$$

В рівняннях (9) (10) для визначення сталих C_1 і C_2 при $t = 0$ приймаємо початкові умови $y = r$, $\dot{y} = v_{y1}$. В результаті отримаємо рівняння швидкості і прискорення часточки при її русі між робочими площинами вздовж осі y:

$$\dot{y} = v_{y1} - gt\sin\alpha - A\omega\left[\cos\left(\omega t + \varphi_1\right) - \cos\varphi_1\right], \tag{15}$$

$$y = r - A\left[\sin\left(\omega t + \varphi_1\right) - \sin\varphi_1\right] + A\omega t\cos\varphi_1 + v_{y1}t - \tfrac{1}{2}gt^2\sin\alpha\,. \tag{16}$$

Для визначення швидкості і прискорення часточки при її русі у зворотному напрямі в межах другої половини одного періоду при $t = t_1$ приймаємо початкові умови $y = B - r$, $\dot{y} = v_{y2}$, і отримуємо наступні рівняння:

$$\dot{y} = v_{y2} - g\left(t - t_1\right)\sin\alpha - A\omega\left[\cos\left(\omega t + \varphi_1\right) - \cos\left(\omega t_1 + \varphi_1\right)\right], \tag{17}$$

$$y = B - r - A\left[\sin\left(\omega t + \varphi_1\right) - \sin\left(\omega t_1 + \varphi_1\right)\right] + \\ + A\omega\left(t - t_1\right)\cos\left(\omega t_1 + \varphi_1\right) + v_{y2}\left(t - t_1\right) - \frac{1}{2} g\left(t - t_1\right)^2 \sin\alpha \tag{18}$$

де B – відстань між робочими площинами;

t_1 – час переміщення часточки між її взаємодією з першою та другою робочими площинами.

За отриманими спрощеними рівняннями (15)-(18) визначаємо параметри переміщення часточки між площинами за один період. Вище приведені рівняння (9) і (11) будуть мати спрощений вигляд:

$$\ddot{x} = -k\left(\dot{x} - V_{\text{п}}\right)\sqrt{\left(\dot{x} - V_{\text{п}}\right)^2 + \dot{z}^2}, . \tag{19}$$

$$\ddot{z} = g\cos\alpha - k\dot{z}\sqrt{\left(\dot{x} - V_{\text{п}}\right)^2 + \dot{z}^2} . \tag{20}$$

Прийнявши для порівняльних обчислень модель симетричного руху часточки [6] виконаємо розрахунки за рівняннями (12), (19) і (20) та порівняємо результат з значеннями отриманими за рівняннями (9) і (11). Також модель симетричного руху дає нам змогу виконувати розрахунки тільки в межах першого півперіоду $0{,}5T = \pi/\omega$, що веде до використання лише рівнянь (15) і (16), але обмежившись значеннями $\alpha = 0$, тобто тільки виключно вертикальне розміщення робочих площин. Окрім того додатково необхідно врахувати умови $y(\pi/\omega) = B - r$, і $\dot{y}(\pi/\omega)\cdot R = v_y$ що характерні для моделі симетричного руху частинки. В результаті застосування цих умов отримаємо:

$$v_y R - A\omega\left[\cos\left(\pi + \varphi\right) - \cos\varphi\right]R = v_y , \tag{21}$$

$$r - A\left[\sin\left(\pi + \varphi\right) - \sin\varphi\right] + \pi A\cos\varphi + \pi v_y/\omega = B - r . \tag{22}$$

де R – коефіцієнт відновлення швидкості після удару [7].

Наявні в рівняннях (21) і (22) невідомі величини v_y і φ визначаємо прийнявши рівняння як систему, в результаті отримаємо:

$$\varphi = \pi - \arcsin\left(\frac{b}{A}\cdot\frac{\tilde{R}}{\sqrt{4\tilde{R}^2 + \pi^2}}\right) - \operatorname{arctg}\frac{2\tilde{R}}{\pi}, \tag{23}$$

$$v_y = \frac{2A\omega R}{1 - R}\cos\varphi , \tag{24}$$

де $\tilde{R} = (1 - R)/(1 + R)$;

b – вільний зазор між робочими площинами, рівний: $b = B - 2r$.

Модель періодичного руху частинки може бути застосована тільки у випадку якщо часточка взаємодіє з обома робочими площинами. Тому обмеженнями такої моделі будуть такі величини як відстань між робочими площинами і амплітуда коливань робочих площин. З результатів (23) і (24) можливо визначити границю швидкості v_y при якій значення R буде рівним одиниці:

$$v_y = \frac{\omega}{\pi}\left(b - 2A\right). \tag{25}$$

Тоді, ґрунтуючись на нерівностях $|\sin x| \le 1$ і $v_y > 0$ з врахуванням рівнянь (23), (24) і (25) отримаємо співвідношення:

$$\frac{b}{A}\cdot\frac{\tilde{R}}{\sqrt{4\tilde{R}^2+\pi^2}}\le A<\frac{b}{2}. \qquad (26)$$

При проведені досліджень нерівність (26) повинна бути врахована обов'язково, в інакшому випадку необхідно розглядати асиметричну модель руху часточки між робочими площинами.

Адекватність введених спрощень визначаємо шляхом порівняння результатів отриманих з використанням рівнянь (9), (10) і (11), з результатами отриманими по рівнянням (19), (20), (23), (24), (25) і (26). При виконанні розрахунків величини параметрів моделі приймались наступними $A=5мм$, $\alpha=0°$, $B=20мм$, $V_n=10м/с$, $k=0{,}1м^{-1}$, $R=0{,}6$, $r=2мм$, $\mu=0{,}4$, $\omega=40c^{-1}$.

Висновки

Результати розрахунків по моделі без спрощень були наступними $v_x=0{,}785$ *м/с*, $v_y=0{,}058$ *м/с*, $v_z=0{,}857$ *м/с*, $\omega_x=428{,}626\,c^{-1}$, $\omega_z=-392{,}277\,c^{-1}$. Результати розрахунків по спрощеній моделі $v_x=0{,}784$ *м/с*, $v_y=0{,}058$ *м/с*, $v_z=0{,}857$ *м/с*, $\omega_x=428{,}638\,c^{-1}$, $\omega_z=-392{,}188\,c^{-1}$.

Слід зазначити що розрахунки виконані за спрощеною моделлю виконуються в чотири рази швидше ніж розрахунки по вихідній (точній) моделі.

Похибка отримана в розрахунках має невелике значення і у середньому становить 0,1135% з максимальним значенням біля 0,5% при визначені швидкості руху часточки по осі y.

Список джерел інформації

1. Патент на корисну модель 64488 від 10.11.2011. Вібросепаратор вертикального типу з повітряним потоком для розділення сипучих сумішей / Сіняєва О.В., Завгородній О.І.: Україна, Український інститут промислової власності.

2. Завгородний А.И., Синяева О.В. Движения шара в воздушном потоке между вибрирующими плоскостями *Вібрації в техніці та технологіях*: Всеукраїнський науково-технічний журнал, №3(67).– Вінниця: ВНАУ, 2012.– С.20-27.

3. Василенко П.М. Теория движения частицы по шероховатым поверхностям сельскохозяйственных машин.– изд-во УАСХН, 1960.–284с.

4. Плявниекс В.Ю. Пространственное соударение двух тел *Вопросы динамики и прочности*. – Рига: "Зинатне", 1970, вып. №20.– С.75-88.

References

1. Vertical type vibrating separator with air flow for separation of bulk mixtures / O.V. Siniaeva, O.I. Zavgorodniy. - Utility model patent 64488 dated 10.11.2011.: Ukraine, Ukrainian Institute of Industrial Property.

2. Zavhorodnyi A.Y., Syniaeva O.V. Dvyzhenyia shara v vozdushnom potoke mezhdu vybryruiushchymy ploskostiamy Vibratsii v tekhnitsi ta tekhnolohiiakh: Vseukrainskyi naukovo-tekhnichnyi zhurnal, №3(67).– Vinnytsia: VNAU, 2012.– S.20-27.

3. Vasylenko P.M. Teoryia dvyzhenyia chastytsy po sherokhovatym poverkhnostiam selskokhoziaistvennykh mashyn.– yzd-vo UASKhN, 1960.–284s.

4. Pliavnyeks V.Yu. Prostranstvennoe soudarenye dvukh tel Voprosy dynamyky y prochnosty. – Ryha: "Zynatne", 1970, vyp. #20.– S.75-88.

Отримано: 08.04.2026. Прийнято: 20.04.2026. Опубліковано: 15.05.2026.